Stoomcursus macro-economie

Wageningen Universiteit

P. v. Mouche

Versie 1.19

Herfst 2004

Inhoudsopgave

Waarschuwing: deze versie van dit manuscript bevat, zeker voor kritische lezers, nog sloridigheden en minder didactische stukken; zelfs enkele blunders kan ik nu nog niet met voldoende zekerheid uitsluiten. Commentaar op dit manuscript wordt zeer op prijs gesteld.

0.1 Inleiding

In de macro-economie bestudeert men hoe collectief gedrag zich manifesteert in geaggregeerde grootheden zoals nationale inkomen, prijsniveau en werkgelegenheid.[1] De compabiliteit tussen micro-economische en macro-economische modellen is een van de aandachtsgebieden van modern economisch onderzoek. In de macro-economie is er minder concensus dan in de micro-economie. De term “micro-economie” is veel ouder dan “macro-economie”; vlak na de tweede wereldoorlog bijvoorbeeld was de term “macro-economie” nog niet echt in gebruik.[2]

We zullen nu snel proberen tot de essentie over te gaan. In § 0.2 komt het ISLM-model der macro-economie aan de orde. De basis daartoe wordt gelegd in § 0.2.1–§ 0.2.4 waar de belangrijkste macro-economische grootheden, hun verbanden en de notie van inkomensevenwicht aan de orde komt. In § 0.2.5–0.2.6 vinden dan nog stap voor stap diverse uitbreidingen van het model plaats. In § 0.2.8 aangekomen zijn we klaar met het opzetten van het ISLM-model; we zullen het er verder analyseren. Alhoewel het om een statisch model gaat belet niks ons om er comperatieve statica te bedrijven. Dynamische modellen, te weten het (discrete) groeimodel van Harrod-Domar en het (continue) neoklassieke groeimodel komen aan de orde in § 0.3. Vooral daar wordt gebruik gemaakt van wat micro-economie.

0.2 Het ISLM-model der macro-economie

0.2.1 Macro-economische grootheden

In het ISLM-model der macro-economie spelen onder meer de volgende macro-economische grootheden een rol:

- Y, nationale inkomen;
- Q, nationale product;[3]
- C, consumptieve vraag;
- I, investeringsvraag;
- S, besparingen;
- G, overheidsbestedingen;
- T, belastingen;
- E, export;
- Im, import.

Laten we deze grootheden kort toelichten.[4] Bij deze grootheden gaat het om (met betrekking tot de economische subjecten) geaggregeerde grootheden. Verder zijn al deze grootheden uitgedrukt in geld.[5] Onder “nationale inkomen” moet men zich de totale beloning (i.e. waarde) van de productiefactoren (waaronder die van arbeid) voorstellen en onder “nationale product” de totale (markt)waarde van de artikelen die door

[1] Als u wilt, mag u micro-economie vergelijken met quantumfysica en macro-economie met statistische fysica. Een verschil is dan wel dat de statistische fysica wél een micro-fundering en de macro-economie dat niet echt heeft.

[2] Edoch, toch zegt men wel dat Adam Smith (1723-1790) al een macro-economisch model had.

[3] Synoniemen: ”binnenlands” voor ”nationaal” en ”output” voor ”product”. Preciezer is het nog om onderscheid te maken tussen bruto-nationale-product en netto-nationale-product. Het netto-nationale-product betreft dan het bruto-nationale-product minus afschrijvingen. Wij zullen verder dat onderscheid niet maken en dus gewoon van “nationale product” spreken.

[4] Het is niet altijd precies duidelijk wat men met deze grootheden bedoelt. Dat niet alleen omdat verschillende economisten er verschillende interpretaties aan geven, maar ook dat gegeven zo’n interpretatie er vaak nog genoeg vaagheden overblijven. (Ik zie mij niet geroepen om deze vaagheden hier in dit manuscript weg te nemen.) Dat maakt het al moeilijk om deze grootheden in concrete situaties te meten. Wij volgen hier min of meer de presentatie van Paul Samuelson van de ideeën van John Keynes (1883-1946).

[5] In § 0.2.5 zullen we hier nader op terugkomen.

de bedrijven geleverd worden.[6] De investeringsvraag vergroot de kapitaalgoederenvoorraad of vervangt oud kapitaal.[7] Verder merken we op dat het de overheid is die de belastingen T en de overheidsbestedingen G in handen heeft en daarmee zogenaamd budgettair beleid kan voeren. Bij ”belastingen” gaat het hier overigens om netto-belastingen: ontvangsten van de overheid door belastingheffing minus subsidies die de overheid verstrekt. ’Export’ betreft de verkopen aan het buitenland en ’import’ de aankopen uit het buitenland. Export minus de import heet netto export.

Verder is er nog een andere belangrijke macro-economische grootheid, te weten

- Z, effectieve vraag;

De effectieve vraag is per definitie gelijk aan de som van de consumptieve vraag, de investeringsvraag, de overheidsbestedingen en de netto export.

Tenslotte: onder het overheidstekort verstaan we de grootheid $G - T$. De grootheid

$$S^{publiek} := T - G \tag{1}$$

heet publieke besparing, de grootheid

$$S^{priv} := Y - T - C \tag{2}$$

heet private besparing en hun som

$$S := S^{publiek} + S^{privaat} \tag{3}$$

heet nationale besparing.

Tenlotte: onder het besteedbaar inkomen (van de consumenten) verstaat men $Y - T$.

0.2.2 Evidente verbanden tussen de macro-economische grootheden

Er bestaan een aantal evidente verbanden tussen bovenstaande grootheden. Dit bekijken we hier nader. Allereerst volgt uit (1–3):

$$\mathbf{??} S = Y - C - G. \tag{4}$$

Omdat winst (en verlies) een onderdeel van het nationale inkomen is, geldt de boekhoudkundige relatie

$$Y = Q$$

en per definitie van effectieve vraag geldt

$$Z = C + I + G + (E - Im). \tag{5}$$

Vanaf nu zien we af van internationale handel hetgeen neerkomt op $E - Im = 0$; wat dat betreft spreken we dan ook wel van een gesloten economie.

0.2.3 Verdere verbanden tussen de macro-economische grootheden

Er zijn nog verbanden van andere soort tussen de macro-economische grootheden. Allereerst is het natuurlijk om te veronderstellen dat C en S (strikt) stijgende functies van het nationale inkomen na belasting, dus van $Y - T$ zijn en dat T een stijgende functie van Y is. Voor het gemak veronderstellen we steeds in deze deelparagraaf dat de overheidsbestedingen G vast zijn (dus bijvoorbeeld niet van Y afhangen). En voorlopig werken we ook met vaste investeringen I.[8]

[6] Deze definities zijn dus op die manier snel verteld, maar bevatten genoeg vaagheden om operationalisering in de praktijk in de weg te staan. Om maar iets te noemen: het is bijvoorbeeld niet de bedoeling dat als een of andere kleuter een boek aan zijn vriendje verkoopt, dat daardoor het nationale product toeneemt. Algemener: bij de berekening van het nationale product gaat het slechts over nieuwe huidige productie. Oude productie zat al in een vorige bepaling van het nationale product. En ook is het niet de bedoeling dat als een autobandenfabriek voor 60.000 Euro banden levert aan een autofabriek en die autofabriek voor 1000.000 Euro auto’s levert waarin die banden verwerkt zijn, dat dit dan een bijdrage zou leveren van 1060.000 aan het nationale product. De bijdrage is slechts 1000.000 Euro. Algemener: de waarde van intermediaire goederen (hier de banden) wordt niet meegeteld.

[7] We komen daarop terug in § 0.3.2.

[8] Dat is niet per se nodig, maar wel gebruikelijk, Keynes volgende.

(5) en (2) leiden nu tot de identiteiten

$$\begin{aligned} Z(Y) &= C(Y - T(Y)) + I + G, && (6) \\ Y &= C(Y - T(Y)) + S^{privaat}(Y - T(Y)) + T(Y). && (7) \end{aligned}$$

Men definieert nu verder nog[9]

$$c(Y) := C'(Y - T(Y)) \text{ (\textit{marginale consumptiequote})},$$

$$s(Y) := S^{\text{privaat}'}(Y - T(Y)) \text{ (\textit{marginale spaarquote})},$$

$$\tau(Y) := T'(Y) \text{ (\textit{marginale belastingquote})},$$

$$\overline{s}(Y) := \frac{S^{\text{privaat}}(Y - T(Y))}{Y} \text{ (\textit{gemiddelde spaarquote})}.$$

In overeenstemming met de strikte stijgendheid van C en S^{priaat} en de stijgendheid van T nemen we aan dat c en s positief zijn en τ niet-negatief is. Uit 7) halen we in het geval dat T constant is,

$$c + s = 1$$

en bijgevolg nog

$$0 < c < 1, \quad 0 < s < 1. \tag{8}$$

0.2.4 Inkomensevenwicht

In de reële wereld[10] valt een cyclisch verband tussen de effectieve vraag Z, het nationale product Q en het nationale inkomen Y waar te nemen. En wel als volgt. Effectieve vraag “vraagt” om een nationaal product. Bij de productie van het nationale product komt het nationale inkomen tot stand. En het besteden van het nationale inkomen leidt tot een effectieve vraag. Het is gebruikelijk om evenwicht in dat kringetje te veronderstellen, hetgeen modelmatig neerkomt op

$$Z = Y (= Q). \tag{9}$$

Men spreekt hier nog preciezer van inkomensevenwicht. Een (micro-economische) interpretatie van inkomensevenwicht is: de vraag is gelijk aan het aanbod.

Een en ander komt nu goed op gang. Inderdaad uit (6) en (9) volgt

$$Y = C(Y - T(Y)) + I + G,. \tag{10}$$

Tezamen met (**??**)olgt

$$S = I.$$

Een Y, en als alles even meezit, dé Y die aan vergelijking (**??**) (of aan 10) voldoet zullen we evenwichtsinkomen noemen en met $Y^\star$ aanduiden. Verder nemen natuurlijk ook alle andere grootheden een waarde aan bij het evenwichtsinkomen, zoals bijvoorbeeld de consumptieve vraag waarvoor we een analoge notatie (dus $C^\star$) gebruiken.

Opgave 1 *Bepaal het evenwichtsinkomen $Y^\star$ en $C^\star$ voor de volgende situaties:*

a. $C(y) = \frac{8}{10}y + 20,\ T(y) = \frac{1}{10}y + 40,\ I = 100,\ G = 52$*;*

b. $C(y) = a + cy,\ T(y) = 0,\ G = 0$*;*

c. $C(y) = a + cy,\ T(y) = T_a + \tau y$ *en* G *is constant.*

[9] Met accenten afgeleiden aanduidend, aanemend dat deze bestaan.

[10] Let op: hier wordt het woord ”reël” niet gebruikt als tegenhanger van ”nominaal”.

Bekijken we nu wat er gebeurt met het inkomensevenwicht bij diverse veranderingen, aannemende dat $T(Y)(=T)$ constant is. We gaan dus comperatieve statica bedrijven. We nemen daarbij aan dat $Y^\star$ uniek is.

In Opgave 1(c), waar $C(y) = a + cy,\ T(y) = T_a + \tau y$ en G is constant, vonden we

$$Y^\star = \frac{a + I + G - cT_a}{1 - c + c\tau}.$$

Daaruit

$$\mu_G := \frac{\partial Y^\star}{\partial G} = \frac{1}{1 - c + c\tau} = \frac{1}{s + c\tau},$$
$$\mu_{T_a} := \frac{\partial Y^\star}{\partial T_a} = \frac{-c}{1 - c + c\tau} = \frac{-c}{s + c\tau},$$

Merk op dat $\mu_G + \mu_T = \frac{s}{s+c\tau}$, en dus gelijk aan 1 is als $\tau = 0.$.

Nu wat algemener, aannemende dat T constant is. Bekijk een verandering van I en wel te weten $I(\delta) = I + \delta$. (Dus $I(0) = I$ de waarde van de oude investeringsvraag.) De vergelijking (**??**) voor het evenwichtsinkomen $Y^\star(\delta)$ wordt nu[11]

$$I + \delta + G = S(Y^\star(\delta) - T) + T.$$

Differentiëren van deze identiteit naar δ levert $1 = S'(Y^\star(\delta) - T)Y^{\star\prime}(\delta)$. Voor $\delta = 0$ wordt dit, met

$$s^\star = S'(Y^\star(0) - T) = s(Y^\star(0)),$$

$1 = S'(Y^\star(0) - T)Y^{\star\prime}(0) = s^\star \cdot Y^{\star\prime}(0)$. Dus $Y^{\star\prime}(0) = 1/s^\star$. Voor kleine δ hebben we daarom, als alles even meezit, volgens de formule van Taylor de benaderingsformule

$$Y^\star(\delta) \approx Y^\star(0) + \frac{\delta}{s^\star}, \tag{11}$$

oftewel

$$\frac{Y^\star(\delta) - Y^\star(0)}{\delta - 0} = \frac{1}{s^\star} \ := \ \mu_I.$$

Opmerkelijk hierbij is dat, vanwege (8), $\frac{\delta}{s^\star} > \delta$, i.e. de toename van het evenwichtskomen is groter dan die van de investeringsvraag. Het getal $\frac{1}{s^\star}$ heet nog <u>multiplicator (van Keynes)</u>. In het concrete geval van Opgave 1(b) halen we uit de oplossing van die opgave dat $Y^\star(\delta) = Y^\star(0) + \frac{\delta}{s^\star}$. Voor dat geval is de benaderingsformule (11) dus zelfs exact.

De invloed op het evenwichtsinkomen van een vergroting van de overheidsbestedingen G is natuurlijk precies hetzelfde als die invloed van een vergroting van de investeringsvraag: $G(\eta) = G + \eta$ zettend vinden we dus weer

$$Y^\star(\eta) \approx Y^\star(0) + \frac{\eta}{s^\star},$$

oftewel

$$\frac{Y^\star(\eta) - Y^\star(0)}{\eta - 0} = \frac{1}{s^\star} \ := \ \mu_G.$$

Bekijken we nu het effect van een grotere spaarzaamheid. Daartoe voeren we een variabele e in de besparingen in door $S(Y - T(Y), e)$ te noteren nemen aan dat $\frac{\partial S}{\partial e} > 0$ en dat we voor $e = 0$ weer de oude situatie hebben. De vergelijking voor het evenwichtsinkomen $Y^\star(e)$ is nu $I + G = S(Y^\star(e) - T, e) + T$. Differentiëren naar e geeft[12] $0 = \frac{\partial S}{\partial y}(Y^\star(e) - T, e)Y^{\star\prime}(0) + \frac{\partial S}{\partial e}(Y^\star(e) - T, e)$. Voor $e = 0$ staat er $0 = \frac{\partial S}{\partial y}(Y^\star(0) - T, 0) \cdot Y^{\star\prime}(0) + \frac{\partial S}{\partial e}(Y^\star(0) - T, 0)$. Dus, omdat $\frac{\partial S}{\partial x}(Y^\star - T, 0) = s^\star$, hebben we $Y^{\star\prime}(0) = -\frac{\partial S}{\partial e}/s^\star$. Voor kleine e is, als alles even meezit, volgens de formule van Taylor

$$\frac{Y^\star(e) - y^\star(0)}{e - 0} \approx \frac{\partial S/\partial e}{s^\star}.$$

[11]Dit evenwichtsinkemen, is als alles even meezit wel-gedefinieerd.

[12]$S(y, e)$ noterend.

Dus het evenwichtsinkomen daalt en $S^\star(0) = I+G-T = S^\star(e)$ Dit leidt tot de zogenaamde spaarparadox: grotere spaarzaamheid leidt tot dezelfde besparingen. Men is misschien geneigd te denken dat de constantheid van $I + G - T$ deze paradox verklaart, maar als we de redelijke aanname zouden maken dat bijvoorbeeld I een niet al te sterk stijgende functie van Y is, dan zou de paradox alleen nog maar versterkt worden: grotere spaarzaamheid leidt tot een daling van de besparingen.

Opgave 2 *Toon dit resultaat aan.*

We komen in § 0.2.6 nog terug op de spaarparadox.

0.2.5 Geld en prijzen

Ook geld speelt natuurlijk nog een rol. Immers alle artikelen waarop Y, I, G et cetera betrekking hebben worden doorgaans tegen geld geruild. Elk der artikelen heeft zijn eigen prijs en we willen nu ook toelaten dat de prijs van de artikelen kan veranderen. Omdat we niet alle artikelen die in de geaggregeerde grootheden een rol spelen expliciet willen modeleren, introduceert men een parameter P met als reëlewereldinterpretatie het (gemiddelde) prijsniveau; in het voorgaande namen we eigenlijk aan dat $P = 1$. Op die manier nemen we als het ware aan dat alle artikelen tegelijkertijd van prijs veranderen. Als het prijsniveau P is, dan correspondeert $I, G, \ldots$ met een hoeveelheid geld $P \cdot I, P \cdot G, \ldots$. In deze context spreken we ook wel bij $P \cdot I, P \cdot G, \ldots$. van investeringsvraag, overheidsbestedingen, ... in geldtermen en bij $I, G, \ldots$. van investeringsvraag, overheidsbestedingen, ... in reële termen.

Onder inflatie verstaat men een stijging van P en onder deflatie een daling van P.

Veronderstellen we nu verder dat er een zekere hoeveelheid geld M in de economie circuleert, dat wil zeggen bij de economische subjecten aanwezig is en bijvoorbeeld niet door hun in (voor hun waarschijnlijk gunstige) investeringsprojecten gestopt is. De reden van deze aanwezigheid is (volgens Keynes) dat economische subjecten speculeren, voorzorgen en transacties uitvoeren. De hoeveelheid geld om te speculeren zij $R_s \cdot P$, die voor transacties zij $R_t \cdot P$ en die om te voorzorgen stellen we voor het gemak gelijk aan 0. Het is natuurlijk om te veronderstellen dat R_s een strikt dalende functie van de rentevoet r is en dat R_t een strikt stijgende functie van het nationale inkomen Y is.[13]

We komen zo tot het verband

$$\frac{M}{P} = R_s(r) + R_t(Y). \tag{12}$$

Algemener zetten we nu nog

$$\frac{M}{P} = L(r, Y)$$

met $\frac{\partial L}{\partial r} < 0$ en $\frac{\partial L}{\partial Y} > 0$.

De overheid (i.e. centrale bank) kan geld creëren door het simpelweg te creëren (bij te laten drukken).[14] Daarmee kan die overheid haar overheidsbestedingen G betalen (indien deze groter dan de belastingen T zijn). Net zo kan ze geld vernietigen. We spreken hier nog van monetair beleid.

Gegeven M en P definieert de vergelijking (12) (of algemener $\frac{M}{P} = L(r, Y)$) een verband tussen r en Y. Als alles even meezit is dit een kromme. Deze kromme, met r op de ordinaat, heet de LM-kromme. Uit de mathematische eigenschappen van de objecten in kwestie volgt:

☺ **1** *De $LM-$kromme is strikt stijgend.*

[13]Dat R_s een strikt dalende functie is vereist enige toelichting. Beschouwen we eens een bezitter die een schuldbrief heeft met een looptijd van 10 jaar terwijl r Na belastingen T en het sparen van S rest van het nationale inkomen nog $Y - T - S$ voor de consumptieve vraag C:

$$C = Y - T - S.$$

??? de rentevoet r klein is. Na 6 jaar weet hij dat hij veel geld nodig zal hebben. Als dan de rentevoet hoger zou zijn en daarmee samenhangend de waarde van zijn schuldbrief lager, zal hij verlies maken als hij zijn schuldbrief dan verkoopt. Vandaar dat hij het ook wenst om geld achter te houden en wel des te meer des te lager de rentevoet is.

[14]Aannemende dat het daarbij niet om zaken als gouden muntstukken gaat.

Het stijgende verloop van de $LM-$kromme is ook als volgt te beredeneren. Een kleine rentevoet r zorgt voor een grote R_s en dus voor een kleine R_t. Daarbij hoort een kleine Y.

Voor het geval $R_s(r) = -\lambda_2 r + l_s$ en $R_t(Y) = \lambda_1 Y + l_t$ vinden we voor de $LM-$kromme

$$Y(r) = \frac{\frac{M}{P} - l_t + \lambda_2 r - l_s}{\lambda_1}. \tag{13}$$

0.2.6 Investeringsvraag en rente

Tot nu toe hebben we de investeringen vast verondersteld. Dat is onrealistisch omdat in de reële wereld de investeringen onder andere afhangen van de rentevoet. Immers uit wat eenvoudige beschouwingen over investeringsprojecten volgt dat een steeds groter aantal van investeringsprojecten aantrekkelijk wordt naarmate de rentevoet lager is. Dat leidt tot de volgende redelijke veronderstelling over investeringen:

☺ **2** *De investeringen I zijn een dalende functie van de rentevoet.*

☺ 2 lost als volgt de spaarparadox op. Als de spaarzaamheid toeneemt, dan zal de rentevoet dalen.[15] Volgens ☺ 2 stijgt nu de investeringsvraag. Maar $S = I + G - T$, dus de besparingen stijgen ook.

(**??**) wordt dus nu als volgt aangepast:

$$I(r) = S(Y - T(Y)) + T(Y) - G.$$

Deze vergelijking definieert een verband tussen r en Y, als het even meezit een kromme. Deze kromme, met r op de ordinaat, heet de IS-kromme. Uit de mathematische eigenschappen van de objecten in kwestie volgt:

☺ **3** *De $IS-$kromme is strikt dalend.*

Het dalend verloop van de $IS-$kromme is ook als volgt te beredeneren. Een kleine rentevoet r zorgt voor grote investeringen I dus ook voor grote $I + G$. Daarbij hoort een grote $S + T$ en daarbij tenslotte een grote Y.

Voor het geval $C(x) = a + cx,\ T(x) = \tau x + b,\ G = g,\ I(r) = -\delta r + i$ vindt men (met behulp van Opgave 1(c)) voor de $IS-$kromme

$$Y(r) = \frac{a - \delta r + i + g - bc}{1 - c + c\tau}. \tag{14}$$

We hebben dus de twee vergelijkingen

$$I(r) = S(Y - T(Y)) + T(Y) - G,$$

$$\frac{M}{P} = L(r, Y).$$

Gegeven M en G hebben we hier voor elke P twee vergelijkingen in onbekenden r en Y. Als alles even meezit is er een unieke oplossing $r(P)$ en $Y(P)$. De functie $Y(P)$ heet ook wel geaggregeerde vraagfunctie. Gegeven P heet $(r(P), Y(P))$ een (korte termijn) macro-economisch evenwicht.

Opgave 3 *Bepaal de macro-economische evenwichten in geval $C(x) = a + cx,\ T(x) = \tau x + b,\ I(r) = -\delta r + i,\ R_s(r) = -\lambda_2 r + l_s,\ R_t(Y) = \lambda_1 Y + l_t$.*

Merk op dat bij een korte-termijn-macro-economisch-evenwicht een gegeven prijsniveau P en geldhoeveelheid M hoort. We willen nu ook nog P verklaren. Daartoe gaan we hieronder verder met de uitbreiding van het model.

[15] Deze uitspraak kan verder onderbouwd worden.

0.2.7 Arbeidsmarkt

Laten we uitgaan van een eenduidig verband tussen het nationale product Q (i.e. Y) en de hoeveelheid arbeid L die daarvoor nodig is. Dus Y is een functie van L en we zetten $Y' > 0$. Duidt met W het loon in geldtermen aan, dus W/P is het reële loon. We nemen aan dat de vraag naar arbeid L_D en het aanbod van arbeid L_S slechts van het reële loon afhangt, zeg respectievelijk

$$\frac{W}{P} = \phi(L_D) \text{ met } \phi' < 0,$$

$$\frac{W}{P} = \psi(L_s) \text{ met } \psi' > 0.$$

Volledige werkgelegenheid is gedefinieerd als een situatie waar de vraag naar arbeid gelijk is aan het aanbod van arbeid. Bij volledige werkgelegenheid geldt dus

$$\frac{W}{P} = \phi(L_F) = \psi(L_F).$$

Dus L_F en $\frac{W}{P}$ zijn (als het even meezit) uniek bepaald.

$$Y_F := Y(L_F)$$

heet het kritieke nationale inkomen. Met deze notie van kritieke nationale inkomen kan men het reëlewereldverschijnsel van werkloosheid in het model introduceren door nog te veronderstellen dat er werkloosheid is als $Y^\star < Y_F$, er volledige werkgelegenheid is als $Y^\star = Y_F$ en dat $Y^\star > Y_F$ zonder "oververhitting van de economie" niet kan voorkomen. In feite heeft het evenwichtsinkomen $Y^\star$ weinig met Y_F elkaar te maken, zodat elk van bovenstaande drie gevallen zich kan voordoen. Een natuurlijke opgave (voor de overheid) is om T en G te bepalen zodanig dat het evenwichtsinkomen $Y^\star$ gelijk is aan Y_F. Bekijken we deze vraag nader, weer veronderstellend dat T onafhankelijk van Y is. Het geval dat $Y^\star < Y_F$ wordt gekarakteriseerd door $Y_F - C(Y_F - T) - I - G > 0$ en het geval dat $Y^\star > Y_F$ door $C(Y_F - T) + I + G - Y_F > 0$.

Opgave 4 *Toon deze karakterisatie aan.*

Aardig aan deze karakterisatie is dat daar $Y^\star$ zelf niet meer in voorkomt. Indien $Y^\star < Y_F$ heet het getal $Y_F - C(Y_F - T) - I - G > 0$ deflatoire gap en indien $Y^\star > Y_F$ heet het getal $C(Y_F - T) + I + G - Y_F > 0$ inflatoire gap. Om een deflatoire gap te bestrijden kan de overheid G vergroten of T verlagen en om een inflatoire gap te bestrijden kan de overheid G verlagen of T vergroten.

0.2.8 Het ISLM-model

We zijn nu klaar met het opzetten van het ISLM-model. Zetten we het nog even op een rijtje.

$$I(r) = S(Y - T(Y)) + T(Y) - G; \tag{15}$$

$$\frac{M}{P} = L(r, Y); \tag{16}$$

$$\frac{W}{P} = \phi(L_F) = \psi(L_F); \tag{17}$$

$$Y = Y(L_F). \tag{18}$$

Het ISLM-model beschrijft de wisselwerking tussen de zogenaamde reële sfeer en monetaire sfeer. Die wisselwerking wordt in dat model veroorzaakt door de rentevoet. Vanwege die wisselwerking is het voor de overheid belangrijk om monetair en budgettair beleid op elkaar af te stemmen. Dat beleid richt zich vooral op het nationale inkomen Y, de rentevoet r en volledige werkgelegenheid.

Het ISLM-model kan gebruikt worden om een indruk te krijgen van de richting waarin de macro-economische grootheden geneigd zijn te bewegen door monetair of budgettair beleid. Daartoe dienen bovenstaande vergelijkingen dus simultaan opgelost te worden. Echter niks belet ons dat als volgt te doen wat bij de analyse van veranderingen kan dienen als een enigszins dynamische verklaring van wat geschiedt. Welnu,

- De vergelijking (17) bepaalt L_F en W/P.
- Vervolgens geeft (18) het kritieke nationale inkomen Y.
- (15) vervolgens geeft r.
- En (16) tenslotte geeft P en dus nu ook W.

De waarden van de macro-economische grootheden waarvoor aan (15)-(18) voldaan is, noemen we ook wel lange-termijn-macro-economisch-evenwicht.

Merken we op dat slechts de verhouding M/P een rol speelt. Dit leidt tot de volgende uitspraak van de zogenaamde hoeveelheidstheorie van geld:

☺ **4** *Indien de geldhoeveelheid verdubbeld wordt, dan wordt P verdubbeld en verandert er verder niks.*

Als voorbeeld van budgettair beleid bekijken we nu wat het effect is van een vergroting van de overheidsbestedingen. Daardoor blijft volgens (17) en (18) het evenwichtsinkomen ongewijzigd. Vanwege (15) moet de vraag naar investeringen dalen en volgens ☺ 2 de rentevoet dus stijgen. Vanwege (16) daalt M/P dan en, omdat M vast is, stijgt P. Dat is: er treedt inflatie op.

Opgave 5 *Analyseer het effect van een grotere looneisen (door dat te vertalen in een grotere functie Ψ).*

Een tekening van de $IS-$ en $LM-$kromme heet nog diagram van Hicks-Hansen. Als alles even meezit snijden de $IS-$kromme en de $LM-$kromme elkaar (in een uniek punt). Het is duidelijk dat een vergroting van M slechts invloed op de $LM-$kromme heeft. Doorgaans zal dit ruwweg een verschuiving naar rechts inhouden. Ook duidelijk is dat een vergroting van G (of een verkleining van T) slechts invloed op de $IS-$kromme heeft. Doorgaans zal ook dit ruwweg een verschuiving naar rechts inhouden.

0.3 Groeimodellen

0.3.1 Groei

In groeimodellen is groeivoet een fundamenteel begrip.[16] Dit soort van modellen zijn ofwel gebaseerd op continue tijd ofwel op discrete tijd (zogenaamde periodenanalyse). In het eerste geval kunnen we voor de tijdsparameter t een reëel getal groter dan of gelijk aan 0 en in het tweede een geheel getal groter dan of gelijk aan 0 nemen.

Bekijken we eerst het geval van de continue tijd. Zij x een (positieve) functie die van (de tijd) t afhangt. De groeivoet van x op het tijdstip t, notatie $\overline{x}$, is gedefinieerd als

$$\overline{x} := \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}.$$

De $t-$afhankelijkheid is dus onderdrukt in de notatie $\overline{x}$.[17] Merk op dat $\overline{x} = \frac{d\ln x}{dt}$ en dat $\overline{x} = \eta^x/t$, waar η^x de elasticiteit van x aanduidt. Indien $\overline{x}$ constant is, spreekt men van gestage groei.

Weer in een handomdraai dat (met a een constante) verifieert men de volgende rekenregels:

$$\begin{aligned} \overline{a} &= 0; && (19)\\ \overline{ax} &= \overline{x}; && (20)\\ \overline{xy} &= \overline{x}+\overline{y}; && (21)\\ \overline{x+y} &= \frac{x}{x+y}\overline{x}+\frac{y}{x+y}\overline{y}; && (22)\\ \overline{x^a} &= a\overline{x}. && (23) \end{aligned}$$

[16] Buiten de economie spreekt men doorgaans van relatieve groeisnelheid in plaats van "groeivoet".

[17] In uitgebreide notatie: $\overline{x}_t := \frac{1}{x(t)}\frac{dx}{dt}(t)$.

Gestage groei van x betekent dat $\overline{x} = c$ (met c een constante). Dus geldt de differentiaalvergelijking $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = c$. De oplossing daarvan is $x(t) = x(0)e^{ct}$. Omgekeerd, als $x(t) = x(0)e^{ct}$, dan is $\overline{x} = c$. Indien $c > 0,\ x(0) > 0$, neemt $x(t)$ toe met de tijd en is er sprake van groei. In andere gevallen zou er eigenlijk ook sprake kunnen zijn van "krimp".

Bekijk nu een drietal functies $a(t), b(t)$ en $c(t)$ die van de tijd t afhangen. Dan geldt, gebruikmakend van de kettingregel, voor de relatieve groeisnelheid van

$$X(t) := f(a(t), b(t), c(t)),$$

waar f een nette functie is, de formule

$$\overline{X} \;=\; \frac{\partial f}{\partial a}\overline{a}\frac{a}{f} + \frac{\partial f}{\partial b}\overline{b}\frac{b}{f} + \frac{\partial f}{\partial c}\overline{c}\frac{c}{f} = \eta^f_a\,\overline{a} + \eta^f_b\,\overline{b} + \eta^f_c\,\overline{c}. \tag{24}$$

(Een analoge formule geldt natuurlijk voor een willekeurig aantal functies.) Indien ook nog f zelf van de tijd afhangt, dan moeten we (24) vervangen door

$$\overline{X} \;=\; \frac{\partial f/\partial t}{f} + \eta^f_a\,\overline{a} + \eta^f_b\,\overline{b} + \eta^f_c\,\overline{c}. \tag{25}$$

Bekijken we nu hetgeval van de discrete tijd. Zij x een (positieve) grootheid die van de tijd afhangt. De groeivoet van x op het tijdstip t, notatie $\overline{x}$, definieren we als

$$\overline{x}(t) := \frac{x(t) - x(t-1)}{x(t-1)}. \tag{26}$$

(Verkorte notaties zijn hier niet zo van toepassing.) Er geldt nu

$$x(t) = \Big(1 + \overline{x}(t)\Big)x(t-1).$$

Men verifieert weer in een handomdraai de volgende rekenregels:

$$\begin{aligned}
\overline{(x+y)}(t) &= \frac{x(t-1)}{x(t-1)+y(t-1)}\overline{x} + \frac{y(t-1)}{x(t-1)+y(t-1)}\overline{y}, && (27)\\
\overline{(ax)}(t) &= \overline{x}(t), && (28)\\
\overline{xy}(t) &= \overline{x}(t) + \overline{y}(t) + \overline{x}(t)\overline{y}(t). && (29)
\end{aligned}$$

In het geval van kleine groeivoeten, hebben we dus, zogenaamde tweede orde effecten verwaarlozend: $\overline{xy}(t) = \overline{x}(t) + \overline{y}(t)$.

Men zegt weer dat x gestaag groeit indien $\overline{x}(t)$ gelijk aan een constante, zeg c, is. Nu komt dit neer op

$$x(t) = x(0)(1+c)^t. \tag{30}$$

De definitie (26) is slechts één redelijke manier: ook voor $\overline{x}(t) := \frac{x(t+1)-x(t)}{x(t)}$ en $\overline{x}(t) := \frac{x(t+1)-x(t)}{x(t+1)}$ zou iets te zeggen zijn geweest.

0.3.2 Kapitaalgoederenvoorraad

Het ISLM-model der macro-economie uit § 0.2 is statisch en vandaar meer een model voor de korte en lange termijn en daardoor niet geschikt voor de zeer lange termijn. Formule (11), bijvoorbeeld, geeft weliswaar aan hoe het evenwichtsinkomen verandert als de investeringsvraag verandert, maar zegt helemaal niets over hoe dit nieuwe inkomensevenwicht bereikt wordt (als het dat al wordt). Met een dynamisch model echter is daar wel inzicht in te verkrijgen. Twee van dergelijke modellen gaan we even bekijken: het groeimodel van Harrod-Domar en het neoklassieke groeimodel. Naast dat deze laten zien hoe de macro-economische grootheden zich bewegen in de loop van de tijd, wordt er ook economische groei gemodelleerd. Zo'n model heet daarom ook wel groeimodel en de achterliggende theorie noemt men groeitheorie.[18]

[18] Synoniem: structuurtheorie

Er zijn verscheidene verklaringen voor economische groei: kapitaalaccumulatie, technische ontwikkeling en handel. De meest eenvoudige groeimodellen houden zich bezig met kapitaalaccumulatie in afwezigheid van technische ontwikkeling en zijn modellen voor de zeer lange termijn.[19] Voor die kapitaalaccumulatie zorgt de investeringsvraag. In het ISLM-model hierboven was deze vraag ook aanwezig maar nog vrij ongemotiveerd. We zullen zien dat verandering van de kapitaalgoederenvoorraad, i.e. de voorraad van de kapitaalgoederen, tot verandering van de overige macro-economische grootheden leidt. De kapitaalgoederenvoorraad duiden we aan met[20]

$$K.$$

Wat terminologie. Men spreekt van een stationaire toestand als alle endogene variabelen tijdsonafhankelijk zijn en van een gestage toestand als alle endogene variabelen een constante relatieve groeisnelheid hebben, dat wil zeggen gestaag groeien. (Die constante mag voor elke variabele verschillen.)

Bij de groeimodellen die we nu gaan bespreken wordt het nationale product Q. i.e. Y, met een productiefunctie $F(K, L)$ gemodelleerd waar K de kapitaalgoederenvoorraad en L de beschikbare hoeveelheid arbeid aanduidt. We nemen aan dat de beschikbare hoeveelheid arbeid groeit met een constante relatieve groeisnelheid

$$n.$$

We zien verder af van overheidsbestedingen en van belastingen.

Men definieert verder:

$$\nu := K/Y \ (\textit{kapitaalcoëfficiënt});$$

$$u := L/Y \ (\textit{arbeidscoëfficiënt}).$$

Y/K noemt men nog de kapitaalproductiviteit en Y/L de arbeidsproductiviteit.

Er doen zich nu twee mogelijkheden voor: discrete en continue modellen.[21] We gaan er steeds vanuit dat kapitaal niet slijt. In de discrete modellen zet men dan nog

$$I_t = K_t - K_{t-1}, \tag{31}$$

en in de continue

$$I_t = \frac{dK}{dt}.$$

Centrale problemen waar het bij groeimodellen om gaat, zijn of een gestage toestand verenigbaar is met volledige werkgelegenheid, hoe de consumptie per eenheid arbeid gemaximaliseert kan worden en of zo'n toestand stabiel is.[22]

0.3.3 Groeimodel van Harrod-Domar

Een discrete eenvoudige versie van het groeimodel van Harrod-Domar bestaat uit de volgende fundamentele vergelijkingen:

$$K_t = \nu Y_t;$$

$$S_t = sY_{t-1}.$$

Met

$$g := \frac{s}{\nu},$$

[19] Er zijn ook dynamische modellen voor de korte termijn. Deze staan veelal bekend als conjunctuurmodellen.

[20] We bedoelen hier fysisch kapitaal. In principe zou men ook nog rekening kunnen houden met menselijk kapitaal.

[21] Bij discrete tijd modellen is er een variabele t die geheeltallige waarden aanneemt, terwijl bij continue modellen de tijd alle reële waarden aan kan nemen. Discrete tijd modellen treden vaak op bij een zogenaamde perioden-analyse.

Het is een misverstand om te denken dat men zomaar kan overstappen van een continu model op een discreet model. De uitkomsten kunnen dan namelijk wel eens essentieel verschillend worden. Voorbeelden daarvan zijn er genoeg te vinden, bijvoorbeeld in de chaos-theorie (in de context van de logistische afbeelding). Het legitimeren van de overstap is daarom steeds een zaak apart.

Bij discrete tijd modellen is het soms van belang om onderscheid te maken tussen ex-ante en ex-post grootheden. (In continue tijd modellen heeft dat onderscheid geen zin.) Kortweg gezegd staat ex-ante voor "gepland" en ex-post voor "gerealiseerd". We gaan hier niet nader op in.

[22] De stabiliteitsvraag laten we in dit manuscript voor wat ze is.

impliceert dat, vanwege $S_t = I_t$ en (31):

$$Y_t - (1+g)Y_{t-1} = 0.$$

Opgave 6 *Laat deze implicatie zien.*

Deze vergelijking is een recursievergelijking en heeft als unieke oplossing

$$Y_t = (1+g)^t Y_0.$$

We zullen naar oplossingen verwijzen met de term "tijdpad". Het tijdpad van Y heeft volgens (30) een groeivoet gelijk aan g; de groeivoet is dus constant. g heet nog de groeivoet van Harrod Ook het tijdpad van K heeft een groeivoet gelijk aan g.

Opgave 7 *Bepaal de groeivoet van Harrod en het tijdpad van Y in geval $s = 2/10,\ \nu = 2$ en $Y_0 = 100$.*

Bovenstaand model kan uitgebreid worden door er de grootte van de beroepsbevolking L_t bij te betrekken. Nemen we aan dat het tijdpad van L exogeen gegeven is door $L_t = L_0(1+n)^t$. De fundamentele vergelijkingen zijn dan:

$$K_t = \nu Y_t, \quad L_t = uY_t;$$

$$S_t = sY_{t-1};$$

$$L_t = L_0(1+n)^t.$$

Achter de eerste twee fundamentele vergelijkingen zit, als u zo wilt, de Leontief productiefunctie $f(K,L) = \min\left(\frac{K}{\nu}, \frac{L}{u}\right)$. die voor de gegeven vaste vaste verhoudingen tussen de productie (i.e. Y hier) en de productiefactoren (i.e. K en L hier) zorgt, onafhankelijk van de productiefactorpijzen die overigens ook niet in de vergelijkingen voorkomen.

Analyse van dit model leidt tot:

> *De bovenstaande fundamentele vergelijkingen hebben een oplossing hebben dan en slechts dan als $g = n$. En tevens geldt dan $Y_t = Y_0(1+g)^t,\ K_t = K_0(1+g)^t,\ L_t = L_0(1+g)^t,\ K_0 = uY_0,\ L_0 = \nu Y_0$.*

Opgave 8 *Toon dit aan. En verder*

1. *Bepaal, aannemende dat $s = 1/10, \nu = 3, u = 1/5$ en dat het er een oplossing is, de relatieve groeisnelheid van de economische grootheden in de gestage toestand.*

2. *Welk effect heeft (aannemende steeds dat er een oplossing is) vergroting van s op de relatieve groeisnelheid? En welk effect heeft verkleining van ν daarop?*

Hier zijn een aantal mankementen van het groeimodel van Harrod-Domar: 1) Dat $g = n$ berust louter op toeval. De gestage toestand noemt men in dat verband ook wel de gouden eeuw. Voor Nederland is $n \approx 0,01$ (en dus als 8 zou gelden $n < g$.) 2) Het is niet mogelijk in dit model het nationale inkomen te distribueren over loon en winst. 3) Er wordt geen rekening gehouden met technische ontwikkeling.

Bekijken we nu het continue groeimodel van Harrod-Domar. De continue versie van de fundamentele vergelijkingen van het discrete groeimodel van Harrod-Domar zijn:

$$K_t = \nu Y_t, \ \ L_t = uY_t;$$

$$S_t = sY_t$$

$$L_t = L_0 e^{nt}.$$

Dit model laat in feite eenzelfde analyse toe als de discrete versie. We vinden, met

$$g := \frac{s}{\nu},$$

$$\frac{dY}{dt} - gY = 0.$$

Weer is

$$g = n$$

een voldoende en noodzakelijke voorwaarde opdat de fundamentele vergelijkingen een oplossing hebben. En als $g = n$ is, dan is de oplossing

$$Y_t = Y_0 e^{gt},\ K_t = K_0 e^{gt},\ L_t = L_0 e^{gt},\ K_0 = \nu Y_0,\ L_0 = \nu Y_0.$$

0.3.4 Het neoklassieke groeimodel

Het neoklassieke groeimodel is in zekere zin te zien als het model dat ontstaat door het groeimodel van Harrod-Domar te voorzien van oneindig veel productietechnieken. Voor beschouwingen op de zeer lange termijn is het neoklassiek groeimodel daarom doorgaans realistischer. De enige verandering zit hem daarbij in de expliciete specificatie van een productiefunctie F (die overigens "net" verondersteld wordt).

Het neoklassieke groeimodel bestaat uit de volgende drie fundamentele vergelijkingen

$$Y_t = F(K_t, L_t);$$

$$S_t = sY_t;$$

$$L_t = L_0 e^{nt}.$$

Hier zijn Y en K endogene variabelen, L is een exogene variabele, en s, n zijn parameters. Voor het gemak[23] veronderstellen we dat F homogeen van graad 1 is.

Omdat F homogeen van graad 1 is, is het verlokkelijk om te gaan werken met per capita eenheden. Daartoe definieert men

$$k_t := \frac{K_t}{L_t}, \quad y_t := \frac{Y_t}{L_t}, \quad f(k) := F(k, 1).$$

De bovenstaande drie fundamentele vergelijkingen zijn leiden dan tot[24]

$$y_t = f(k_t);$$

$$\frac{dk_t}{dt} = sf(k_t) - nk_t; \tag{32}$$

$$L_t = L_0 e^{nt}.$$

Opgave 9 *Laat zien hoe die vergelijkingen daartoe leiden.*

Opmerking: vaak wordt nog verondersteld dat f differentieerbaar is en een negatieve afgeleide heeft.

Van deze drie vergelijkingen is (32) het interessantst. Het is een (autonome (niet-lineaire)) differentiaalvergelijking.[25] Er bestaan stellingen voor wanneer zo'n vergelijking een oplossing heeft. Wij gaan er nu van uit dat gegeven een waarde voor k op $t = 0$ er een unieke oplossing van (32) is.

We richten nu eens speciaal onze aandacht op oplossingen die constant zijn, dus $k_t = k_0$ voor alle t. De existentie van zo'n oplossing komt dus neer op

$$\frac{f(k_0)}{k_0} = \frac{n}{s}. \tag{33}$$

[23] Maar ook omdat dat mogelijkheid biedt om de marktvorm van volledige concurrentie (met constante schaalopbrengsten) erbij te betrekken.

[24] En zijn er zelfs equivalent mee.

[25] Een differentiaalvergelijking beschrijft de samenhang tussen de karakteristieke grootheden van een proces en de verandering van die grootheden. Ze legt vast hoe zich bij een gegeven toestand de veranderingstendens bereken laat. Reeds Henri Poincaré (1854-1912) merkte op dat als men al expliciete oplossingen (van differentiaalvergelijkingen) verkrijgen kan, deze op zich een niet al te nastrevenswaardig doel zijn.

Vergelijking (33) kan meerdere oplossingen hebben. Als k_0 zo'n oplossing is, dan geldt dus

$$k_t = k_0, \;\; y_t = f(k_t),$$

en in termen van K_t en Y_t:

$$K_t = k_0 L_0 e^{nt},$$

$$Y_t = f(k_0) L_0 e^{nt}.$$

Dus de groeivoet van L_t, K_t en Y_t is gelijk aan n. Merk nog op dat nu

$$\frac{Y_0}{K_0} = \frac{n}{s}.$$

Met $K_0 = \nu Y_0$ geldt dat $\frac{s}{\nu} = n$, dezelfde conditie die we bij het groeimodel van Harrod-Damor vonden.

Merk op dat het neoklassieke groeimodel de toevalligheid van $g = n$ in het groeimodel van Harrod-Domar repareert. De kapitaalproductiviteit ν is nu niet meer exogeen en wordt dusdanig gekozen dat $\frac{s}{\nu} = n$ opgaat.

Opgave 10 *Bepaal de waarde van de kapitaal-arbeid verhouding $K(t)/L(t)$ voor de stationaire toestand in het neoklassieke groeimodel waar $F(K,L) = K^{1/2}L^{1/2}$, de spaarquote $s = 1/10$ en de relatieve groeisnelheid van arbeid $n = 25/1000$ is.*

Er is een zeer remarkabele regel van toepassing op het neoklassieke groeimodel, namelijk de Gouden regel van de accumulatie, opgesteld door Phelps. f' de marginale kapitaalproductiviteit noemend, luidt deze regel:

> *De consumptie per eenheid arbeid is maximaal indien $f'(k_0) = n$, i.e. indien de marginale kapitaalproductieviteit gelijk is aan de groeivoet van de beroepsbevolking.*

De geldigheid van deze regel toont men als volgt aan. Er geldt $\frac{dK}{dt} = nK_t$ en dus $C_t = Y_t - I_t = F(K_t, L_t) - \frac{dK}{dt} = F(K_t, L_t) - nK_t$. De consumptie per eenheid arbeid is daarom gelijk aan $\frac{F(K_t,L_t)}{L_t} - n\frac{K_t}{L_t} = F(\frac{K_t}{L_t}, 1) - nk_t = f(k_t) - nk_t = f(k_0) - nk_0$. Dit is maximaal voor een waarde van k_0 waarvoor $f'(k_0) = n$ geldt.

Opgave 11 *Bepaal met behulp van de Gouden regel van de accumulatie de optimale spaarquote (in de zin dat deze de consumptie per eenheid arbeid maximaliseert) in het standaard neoklassieke groeimodel waar $F(K,L) = K^{1/2}L^{1/2}$ en de groeivoet van de beroepsbevolking $3/10$ is.*

0.4 Oplossingen van de opgaven

Oplossing 1 a. $Y^\star = 500$ en $C^\star = 420$.
b. $Y^\star = \frac{a+I}{1-c}$ en $C^\star = \frac{a+cI}{1-c}$.
c. $Y^\star = \frac{a+I+G-cT_a}{1-c+c\tau}$ en $C^\star = \frac{a+cI+ac\tau+cG-T_a c^2}{1-c+c\tau}$.

Oplossing 2 De vergelijking voor het evenwichtsinkomen $Y^\star(e)$ is $I(Y^\star(e)) + G = S(Y^\star(e) - T, e) + T$. Differentiëren naar e geeft $I'(Y^\star(e))Y^{\star\prime}(e) = \frac{\partial S}{\partial x}(Y^\star(e) - T, e)Y^{\star\prime}(e) + \frac{\partial S}{\partial e}(Y^\star(e) - T, e)$. Voor $e = 0$ staat er, met $i := I'(Y^\star), i \cdot Y^{\star\prime}(0) = s^\star Y^{\star\prime}(0) + \frac{\partial S}{\partial e}(Y^\star - T, 0)$. Dus $Y^{\star\prime}(0) = -\frac{\partial S}{\partial e}/(s^\star - i)$ En voor kleine e is dan volgens de formule van Taylor $Y^\star(e) \approx Y^\star - \frac{\partial S/\partial e}{s^\star - i}e$. Merk tenslotte op dat i vanwege het niet al te sterk stijgen van de investeringsvraag kleiner dan $s^\star$ is zodat dus $\frac{\frac{\partial S}{\partial e}}{s^\star - i}e > \frac{\frac{\partial S}{\partial e}}{s^\star}e$ waardoor de paradox aleen maar versterkt wordt. Immers $Y^\star(e) < Y^\star(0)$ waaruit $S^\star(e) = I(Y^\star(e)) + G - T < I(Y^\star(0)) + G - T = S^\star(0)$.

Oplossing 3 $(r, Y) = (\frac{a+i+g-bc-(1-c+c\tau)Y}{\delta}, \frac{(a+i+g-bc)\lambda_2 + (\frac{M}{P} - l_t - l_s)\delta}{\delta\lambda_1 + (1-c+c\tau)\lambda_2})$.

Oplossing 4 In het eerste geval geldt $Y_F - Y^\star = \int_{Y^\star}^{Y_F} 1 \cdot dY > \int_{Y^\star}^{Y_F} c(Y)dY = \int_{Y^\star}^{Y_F} \frac{d}{dY}(C(Y-T)+I+G)dY = C(Y_F - T) + I + G - (C(Y^\star - T) + I + G) = C(Y_F - T) + I + G - Y^\star$. Dus $Y_F - C(Y_F - T) - I - G > 0$. Net zo vinden we $Y_F - C(Y_F - T) - I - G > 0$ in het tweede geval. En natuurlijk is $Y_F - C(Y_F - T) - I - G = 0$ als $Y = Y_F$.

Oplossing 5 L_F neemt dan af. Daardoor neemt ook Y_F af. Vanwege (15) moet de vraag naar investeringen dalen en volgens ☺ 2 de rentevoet dus stijgen. Vanwege (16) daalt M/P dan en, omdat M vast is, stijgt P. Dat is er treedt inflatie op.

Oplossing 6 Er volgt $I_t = sY_{t-1}$, dus $K_t - K_{t-1} = sY_{t-1}$. $K_t = \nu Y_t$ geeft $\nu(Y_t - Y_{t-1}) = sY - t - 1$, oftewel $Y_t - \frac{\nu+s}{\nu} Y_{t-1} = 0$. Dus $Y_t - (1+g)Y_{t-1} = 0$.

Oplossing 7 $g = 1/10$ en $Y_t = 100 \cdot 1,1^t$.

Oplossing 8 Als er een oplossing is, dan is $\nu Y_t - \nu Y_{t-1} = K_t - K_{t-1} = sY_{t-1}$. Daaruit $\overline{Y} = g$. Dit impliceert de formule voor Y_t. Het verband tussen K_t en Y_t impliceert vervolgens de formule voor K_t. De formule voor L_t is triviaal. De laatste twee formules zijn ook triviaal. Omgekeerd als aan de formules voldaan is, dan hebben we te maken met een oplossing.

a. $g = \frac{s}{\nu} = 1/30$. (De waarde van u doet er niet toe.)

b. Daardoor neemt g toe.

Oplossing 9 $y_t = \frac{Y_t}{L_t} = \frac{F(K_t, L_t)}{L_t} = F(\frac{K_t}{L_t}, L_t) = F(k_t, 1) = f(k_t)$.
$\frac{1}{k_t}\frac{dk_t}{dt} = \frac{d\ln(k_t)}{dt} = \frac{d\ln(K_t/L_t)}{dt} = \frac{d\ln(K_t) - \ln(L_t)}{dt} = \frac{d\ln(K_t)}{dt} - \frac{d\ln(L_t)}{dt} == \frac{1}{K_t}\frac{dK_t}{dt} - n$ en $\frac{1}{K_t}\frac{dK_t}{dt} = \frac{1}{K_t} sY_t = s\frac{Y_t/L_t}{K_t/L_t} = s\frac{y_t}{k_t} = s\frac{f(k_t)}{k_t}$, waaruit de tweede gewenste vergelijking.

Oplossing 10 16.

Oplossing 11 $f(k) = \sqrt{k}$. Daaruit $k_0 = \frac{25}{9}$. En (33) geeft $s = 1/2$.