Was sind und was sollen die Potentialspiele?

© P. H. M. v. Mouche

2018

Verbeterde versie 0.65

(juli 2020)

GIJ
ZULT
BEWIJZEN
EN
GEEN
VERHAALTJES
UIT
UW
DUIM
ZUIGEN

Voorwoord

Dit typoscript over potentiaalspelen is omlaag te laden op `http://pvmouche.deds.nl` (indien dat webadres nog bestaat).[1] Het is in eerste instantie bedoeld voor de wetenschappelijke gemeenschap en mag naar eigen goeddunken gebruikt worden. Het zou wel van karakakter getuigen als daarbij 🄯 gerespecteerd wordt.

Omdat dit typoscript een versienummer < 1 heeft, voelt de auteur zich nog niet zo verantwoordelijk voor onvolkomend- en onvolledigheden; aan een betere versie wordt gewerkt. Uiteraard juicht de auteur verdere op- en aanmerkingen die kunnen leiden tot verbeteringen toe.

PS: de pakkende titel van het typoscript is geïnspireerd door het beroemde artikel “was sind und was sollen die Zahlen” van Richard Dedekind uit 1888.

Inhoudsopgave

[1] Voor de vervaardiging ervan is het (idealistische) publieke-domein-tekstzetsysteem LaTeX gebruikt onder het (idealistische) besturingssysteem Linux.

1 Inleiding

Menig speltheoretisch model heeft de mathematische structuur van spel in strategische vorm. Zo'n spel hebbend zijn de volgende vragen doorgaans standaard.

- Heeft het spel een nash evenwicht? Zo ja, is dat uniek?
- Leidt verbeteringsdynamica tot een nash evenwicht?
- Hoe zit het met de pareto efficiëntie van nash evenwichten, in het bijzonder wat is de prijs van anarchie?

Potentiaalspelen vormen een nieuwe klasse van spelen in de speltheorie die een en ander te melden hebben wat deze vragen betreft, met name voor de eerste twee. Ook voor het bedrijven van comparatieve statica kan het mooi meegenomen zijn als het spel een potentiaalspel is. Er zijn ondertussen tal van potentiaalspelen in omloop. De eerste potentiaalspelen zijn te vinden in het invloedrijke artikel [16] van Monderer en Shapley uit 1996.

Ruwweg gesproken, is een potentiaalspel een spel in strategische vorm waarvoor er een reëelwaardige functie P,[2] potentiaal genaamd, op de verzameling der strategieprofielen bestaat die op de een of andere manier voor elke speler de uitbetalingsverandering ten gevolge van een verandering van zijn strategie uitdrukt. "Potentiaal" in het woord potentiaalspel refereert aan een concept uit de natuurkunde waar men onder andere electrische en gravitatie potentialen bestudeert.

Potentiaalspelen zijn een aanwinst voor de economische wetenschap en voor de speltheorie in het bijzonder. Wel te weten vanwege de volgende eigenschappen.

A. Elke maximaliseerder van P is een nash evenwicht. Dus als het spel eindig is, heeft het een nash evenwicht.

B. Voor elk eindig potentiaalspel is er een leerproces gebaseerd op (een bepaald type van) verbeteringsdynamica dat na een eindig aantal stappen in een nash evenwicht uitmondt.

C. Comparatieve statica bedrijven wordt eenvoudiger.

D. Meer inzicht in de prijs van anarchie.

E. Resultaten voor robuustheid met betrekking tot onvolledige informatie.

Het nash evenwichtsprobleem voor een spel in strategische vorm komt in eerste instantie neer op het bepalen van een dekpunt van de verenigde beste anwoord correspondentie. Zo'n dekpuntprobleem is moeilijker hanteerbaar dan het maximaliseren van een potentiaal P, zijnde een functie. Het lijkt erop dat potentiaalspelen "minder last" van discontinuieiten in de uitbetalingsfuncties hebben dan menige andere klasse van spelen.

[2] We zien hier even af van ordeningspotentialen.

Een en ander begon met de publicatie [19] van Rosenthal in 1973 over congestiespelen. De eerste formele definitie van potentiaalspelen is in [16]; daar wordt onder meer aangetoond dat congestiespelen potentiaalspelen zijn. Het eerste voorbeeld van een potentiaalspel dat in dat artikel genoemd wordt, betreft een zekere klasse van cournot oligopolies.

Potentiaalspelen hebben tal van toepassingen. Enkele standaardtoepassingen zijn te vinden in de context van

- congestie ([15, 19, 16]) en locatie van faciliteiten ([14, 21]);
- neurale netwerken ([5, 22]) en draadloze netwerken ([4]);
- industriële organisatie ([1, 10]) en milieu-economie.[3]

Potentiaalspelen komen dus ook in de economie voor; het artikel [16] betreft een artikel in een economisch tijdschrift. In de economie hebben ze, met uitzondering van de industriële organisatie theorie, hun weg nog niet echt gevonden bij de beoefenaars van de diverse disciplines. Laat staan dat ze dat hebben in economische leerboeken.

Op het eerste gezicht is het meestal helemaal niet duidelijk is of een spel een of ander potentiaalspel is. Uit te maken of een spel al of niet een potentiaalspel is, kan een vrij moeilijk probleem zijn. Dat maakt dat het waarschijnlijk is dat er nog heel wat economische spelen (met enige status) zijn die potentiaalspelen zijn zonder dat dat bekend is. Inderdaad, recentelijk heeft de auteur (met medewerking van anderen) de volgende spelen als potentiaalspel geïdentificeerd:

- hotelling locatiespel [7];
- binaire actiespelen met afwijkingseigenschappen [8], in het bijzonder kartelspelen met optimale herverdeling [25] en het coalitieformatiespel over genetisch manipulatie in de akkerbouw in [18];
- binair statusspel [13].

De literatuur over potentiaalspelen is, zeker voor beginners, wat moeilijk te behapstukken. Dit typoscript over potentiaalspelen biedt een snelle efficiënte instap; echter er is slechts aandacht voor bovengenoemde eigenschappen A en B. Een achttal typen van abstracte potentiaalspelen wordt besproken. In verband met eigenschap B zijn ook zogenaamde zwak acyclische spelen ([26]) interessant en krijgen daarom ook aandacht. Wat concretere spelen betreft is er met name aandacht voor congestiespelen.[4]

Veel wat in het typoscript aan de orde komt is wiskundig elementair van aard. Dit maakt dat het typoscript ook geschikt is voor wiskundig minder onderlegde lezers; een zekere mathematische rijpheid is wel van voordeel. Het typoscript is vrij op zichzelf staand. De auteur gaat er eigenlijk van uit dat de lezer bekend is met de notie van spel in strategische vorm en bijhorende standaard fundamentele noties, zoals dat van

[3] Zie paragraaf 5.4.

[4] Bewijzen dat een of ander concreet spel een potentiaalspel is, is mooi meegenomen maar impliceert niet dat men het spel (en corresponderende reële wereld probleem) goed genoeg begrijpt.

nash evenwicht. Desalniettemin worden in de volgende paragraaf nog even de ter zake zijnde noties samengevat. Verder worden daar enkele mathematische notaties gefixeerd en enkele conventies besproken.

Aangaande verdere resultaten voor potentiaalspelen, noemt de auteur hier nog expliciet [9] (dat over geaggregeerde spelen gaat).

2 Voorbereidingen

2.1 Conventies en notaties

2.2 Spelen in strategische vorm

De volgende fundamentele definitie is (voor zover de auteur weet) afkomstig van von Neumann.

Definitie 1 *Een spel in strategische vorm (tussen n spelers) is een geordend $2n$-tal*

$$\Gamma := (X_1, \dots, X_n; f_1, \dots, f_n),$$

waar elke X_i een niet-lege verzameling en $f_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$ een functie is. De verzameling

$$N := \{1, \dots, n\}$$

heet spelersverzameling en haar elementen heten spelers. De verzameling X_i heet de strategieverzameling van speler i en f_i heet de uitbetalingsfunctie van speler i. Een element van X_i heet strategie van speler i en een element van

$$\mathbf{X} := X_1 \times \cdots \times X_n$$

heet strategieprofiel. $\mathbf{X}$ heet strategieprofielverzameling. Verder heet, als $\mathbf{x}$ een strategieprofiel is, $f_i(\mathbf{x})$ de uitbetaling aan speler i bij $\mathbf{x}$. Een spel in strategische vorm heet eindig als elke strategieverzameling eindig is. $\diamond$

Om misverstanden te voorkomen: n in bovenstaande definitie is een positief geheel getal, dus $n = 1$ mag ook. En ook: we houden ons in dit typoscript alleen met zuivere strategieën (en niet met gemengde) bezig. Merk op dat we in deze definitie niet aannamen dat de strategieverzamelingen delen van een of andere $\mathbb{R}^m$ zijn. We noteren een spel in strategische vorm vaak met Γ. Als we een spel in strategische vorm beschouwen dan gebruiken we, tenzij anders vermeld, automatisch bovenstaande notaties. (Dit geldt ook voor diverse nog volgende notaties.)

We noteren voor een spel in strategische vorm en een speler i,

$$\mathbf{X}_{\hat{\imath}} := X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n.$$

We identificeren soms $\mathbf{X}$ met $X_i \times \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$ en schrijven dan $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ als $\mathbf{x} = (x_i; \mathbf{x}_{\hat{\imath}})$.[5] (Ook een element van $\mathbf{X}_{\hat{\imath}}$ noemen we wel strategieprofiel.)

Een spel in strategische vorm Γ tussen 2 spelers wordt dus gegeven door twee niet-lege verzamelingen X_1, X_2 en door twee functies $f_1 : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ en $f_2 : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$. Als het spel eindig is, zeg als $\#X_i = p_i$ $(i = 1, 2)$, dan kunnen we Γ op een natuurlijke wijze representeren als een $p_1 \times p_2$ bi-matrix $(A_1; A_2)$, i.e. een $p_1 \times p_2$ matrix met op elke plaats twee getallen. Namelijk als we X_i als $\{1, \ldots, p_i\}$ voorstellen, zetten we op de eerste plaats van de intersectie van de lijn met index k en de kolom met index l van de matrix de uitbetaling $f_1(k, l)$ en op de tweede plaats daar de uitbetaling $f_2(k, l)$. We spreken nu ook wel van bi-matrix-spel. Omdat dat representeren op meerdere manier kan zo gauw tenminste één strategieverzameling uit meer dan één element bestaat, is de representatie als bi-matrix doorgaans niet eenduidig.

Vanuit wiskundig standpunt gezien is het concept van een spel in strategische vorm dus zeer simpel.[6]

Beschouw verder een spel in strategische vorm $\Gamma = (X_1, \ldots, X_n; f_1, \ldots, f_n)$. Voor $i \in N$ en $\mathbf{z} \in \mathbf{x}_{\hat{\imath}}$ heet $b_i \in X_i$ een beste antwoord van speler i tegen $\mathbf{z}$ indien

$$b_i \in \mathrm{argmax} f_i^{(\mathbf{z})}.$$

Definitie 2 *a. Voor elke speler i en $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$ is de conditionele uitbetalingsfuncties $f_i^{(\mathbf{z})} : X_i \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f_i^{(\mathbf{z})}(x_i) := f_i(x_i; \mathbf{z})$.*

b. De beste antwoord correspondentie van speler i is de correspondentie $R_i : \mathbf{X}_{\hat{\imath}} \multimap X_i$ gedefinieerd door $R_i(\mathbf{z}) := \mathrm{argmax} f_i^{(\mathbf{z})}$.[7]

c. De verenigde beste antwoord correspondentie is de correspondentie $\mathbf{R} : \mathbf{X} \multimap \mathbf{X}$ gedefinieerd door $\mathbf{R}(\mathbf{x}) := R_1(\mathbf{x}_{\hat{1}}) \times \cdots \times R_n(\mathbf{x}_{\hat{n}})$. $\diamond$

$R_i(\mathbf{z})$ heet nog de beste antwoord verzameling van i tegen $\mathbf{z}$. In geval dat de beste antwoord correspondentie $R_i : \mathbf{X}_{\hat{\imath}} \multimap X_i$ singleton-waardig is, kunnen we haar als afbeelding $R_i : \mathbf{X}_{\hat{\imath}} \to X_i$ opvatten. En in geval elke beste antwoord correspondentie R_i singleton-waardig is, kunnen we de beste antwoord correspondentie $\mathbf{R} : \mathbf{X} \multimap \mathbf{X}$ opvatten als een afbeelding $\mathbf{R} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$. Er geldt dan $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = (R_1(\mathbf{x}_{\hat{1}}), \ldots, R_n(\mathbf{x}_{\hat{n}}))$.

Definitie 3 *Een strategieprofiel $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ heet een nash evenwicht als $f_j(y_j; \mathbf{x}_{\hat{\jmath}}) \leq f_j(\mathbf{x})$ voor alle $j \in N$ en $y_j \in X_j$.* $\diamond$

[5] Let U even op de conventie van de ";" en dat aan deze notatie ook een zin gegeven kan worden als $n = 1$ is (dan is $\mathbf{X}_{\hat{1}}$ de verzameling die de lege functie functie bevat). Het nut van de notatie $\mathbf{X}_{\hat{\imath}}$ wordt duidelijk als we een afzonderlijke speler, zeg speler i bekijken. Vanuit hem gezien bestaat een strategieprofiel $\mathbf{x}$ uit zijn eigen strategie x_i en uit strategieën $\mathbf{x}_{\hat{\imath}}$ van de andere spelers. In het geval men louter met $n = 2$ werkt is deze notatie overbodig. Verder merken we op dat er in plaats van $\mathbf{X}_{\hat{\imath}}$ ook (volgens de auteur minder geschikte) notaties als $\mathbf{X}_{-i}$ in de speltheoretische literatuur in omloop zijn.

[6] Iets moeilijker zou het worden als men $n = \infty$ toe zou laten; deze generalisatie is overigens theoretisch best mogelijk en niet bij voorbaat een theoretische nutteloze exercitie.

[7] Even aandacht voor het geval $n = 1$: dan is $R_1 : \mathbf{X}_{\hat{1}} \to X_1$ een constante functie met domein een singleton-verzameling en constante gelijk aan $\mathrm{argmax} f_1$.

Met

$$E(\Gamma),$$

of korter ook wel met E, duiden we de verzameling van nash evenwichten van Γ aan.

Hier is een eenvoudig fundamenteel resultaat:

Propositie 1 *Voor $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ zijn equivalent:*

1. *$\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ is een nash evenwicht;*
2. *$x_j \in R_j(\mathbf{x}_{\hat{j}})$ $(j \in N)$;*
3. *$\mathbf{x}$ is een dekpunt van de correspondentie $\mathbf{R}$, i.e. $\mathbf{x} \in \mathbf{R}(\mathbf{x})$.* $\diamond$

Definitie 4 *Γ heet*

a. <u>coördinatiespel</u> als alle uitbetalingsfuncties identiek zijn;[8]

b. <u>dummyspel</u> als elke conditionele uitbetalingsfunctie constant is.

Definitie 5 *Een spel in strategische vorm Γ met identieke strategieverzamelingen, i.e. met $X_1 = \cdots = X_n =: X$, heet <u>symmetrisch</u> als voor elke $i \in N$, elke permutatie π van N en elke $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$,*

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = f_{\pi(i)}(x_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(n)}). \ \diamond$$

2.3 Een tweetal nuttige binaire relaties

In deze deelparagraaf introduceren we twee typen van binaire relaties die technisch zeer handig zullen zijn. Het was de mathematisch economist Kukushkin die in [11] voor het eerst de voordelen van het gebruik van de taal der binaire relaties in de context van spelen in strategische vorm aantoonde.

Beschouw weer een spel in strategische vorm. Definieer voor $i \in N$ de relatie $\rhd_i$ op $\mathbf{X}$ door

$$\mathbf{b} \rhd_i \mathbf{a} : \quad \mathbf{b}_{\hat{\imath}} = \mathbf{a}_{\hat{\imath}} \ \wedge \ b_i \in R_i(\mathbf{b}_{\hat{\imath}}) \ \wedge \ a_i \notin R_i(\mathbf{a}_{\hat{\imath}})$$

en de relatie $\rhd$ op $\mathbf{X}$ door

$$\mathbf{b} \rhd \mathbf{a} : \text{ er bestaat } i \in N \text{ zodanig dat } \mathbf{b} \rhd_i \mathbf{a}. \tag{1}$$

Merk op dat

$$\mathbf{b} \rhd_i \mathbf{a} \ \Rightarrow \ f_i(\mathbf{b}) > f_i(\mathbf{a})$$

en dat de relaties $\rhd_i$ en $\rhd$ irreflexief zijn. Met $\lhd_i$ duiden we de duale relatie van $\rhd_i$ aan en met $\lhd$ de de duale relatie van $\rhd$.

Definieer voor $i \in N$ de relatie $\rhd_i^I$ op $\mathbf{X}$ door

$$\mathbf{b} \rhd_i^I \mathbf{a} : \quad \mathbf{b}_{\hat{\imath}} = \mathbf{a}_{\hat{\imath}} \ \wedge \ f_i(\mathbf{b}) > f_i(\mathbf{a})$$

[8] Dus als $f_1 = f_2 = \cdots = f_n$.

en de relatie $\rhd^I$ op $\mathbf{X}$ door

$$\mathbf{b} \rhd^I \mathbf{a}: \text{ er bestaat } i \in N \text{ zodanig dat } \mathbf{b} \rhd^I_i \mathbf{a}.$$

Merk op dat de relaties $\rhd^I_i$ en $\rhd^I$ irreflexief zijn. Met $\lhd^I_i$ duiden we de duale relatie van $\rhd^I_i$ aan en met $\lhd^I$ de de duale relatie van $\rhd^I$.

Natuurlijk geldt

$$\mathbf{b} \rhd_i \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b} \rhd^I_i \mathbf{a}, \qquad \mathbf{b} \rhd \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b} \rhd^I \mathbf{a}. \tag{2}$$

Propositie 2 *Laat* $\mathbf{e} \in \mathbf{X}$.

1. $\mathbf{e}$ *is een nash evenwicht* $\Leftrightarrow$ *er is geen* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *met* $\mathbf{x} \rhd^I \mathbf{e}$.
2. $\mathbf{e} \in E \;\Rightarrow\;$ *er is geen* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *met* $\mathbf{x} \rhd \mathbf{e}$.
3. *Stel alle beste antwoord correspondenties zijn eigenlijk.*[9] *Dan*

$$\mathbf{e} \in E \;\Leftrightarrow\; \text{er is geen } \mathbf{x} \in \mathbf{X} \text{ met } \mathbf{x} \rhd \mathbf{e}. \;\diamond$$

Bewijs.— 1. Dit zij duidelijk.

2. Vanwege deel 1 en (2).

3. Vanwege deel 2 resteert "$\Leftarrow$". Dat down we uit het ongerijmde. Stel dus dat voor alle $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ de uitspraak $\mathbf{x} \rhd \mathbf{e}$ onwaar is en dat $\mathbf{e} \notin E$. Fixeer $i \in N$ zodanig dat $e_i \notin R_i(\mathbf{e}_{\hat{\imath}})$. Omdat R_i eigenlijk is, bestaat er een $y_i \in R_i(\mathbf{e}_{\hat{\imath}})$. Per veronderstelling geldt $(y_i; \mathbf{a}_{\hat{\imath}}) \rhd \mathbf{a}$ niet. Daarom geldt ook $(y_i; \mathbf{e}_{\hat{\imath}}) \rhd_i \mathbf{e}$ niet. Dit impliceert $e_i \in R_i(\mathbf{e}_{\hat{\imath}}) \;\vee\; y_i \notin R_i(\mathbf{e}_{\hat{\imath}})$. Dus de tegenspraak $y_i \notin R_i(\mathbf{e}_{\hat{\imath}})$ volgt. Q.e.d.

3 Speeltuin van potentiaalspelen

3.1 Potentialen

Definitie 6 *Beschouw een spel in strategische vorm* $\Gamma = (X_1, \ldots, X_n; f_1, \ldots, f_n)$. *Een functie* $P : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *heet een*

a. *exacte potentiaal (voor* Γ*) als voor elke* $i \in N$, $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$ *en* $a_i, b_i \in X_i$

$$f_i(a_i; \mathbf{z}) - f_i(b_i; \mathbf{z}) = P(a_i; \mathbf{z}) - P(b_i; \mathbf{z}).$$

b. *gewogen potentiaal (voor* Γ*) als er positieve getallen* $w_1, \ldots, w_n$ *bestaan zodanig dat voor elke* $i \in N$, $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$ *en* $a_i, b_i \in X_i$

$$f_i(a_i; \mathbf{z}) - f_i(b_i; \mathbf{z}) = w_i(P(a_i; \mathbf{z}) - P(b_i; \mathbf{z})).$$

c. *ordinale potentiaal (voor* Γ*) als voor elke* $i \in N$, $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$ *en* $a_i, b_i \in X_i$

$$f_i(a_i; \mathbf{z}) < f_i(b_i; \mathbf{z}) \;\Leftrightarrow\; P(a_i; \mathbf{z}) < P(b_i; \mathbf{z}).$$

[9] Dat is dus bijvoorbeeld zo als het spel eindig is.

d. *gegeneraliseerde ordinale potentiaal* *(voor* Γ*) als voor elke* $i \in N$*,* $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$ *en* $a_i, b_i \in X_i$

$$f_i(a_i; \mathbf{z}) < f_i(b_i; \mathbf{z}) \;\Rightarrow\; P(a_i; \mathbf{z}) < P(b_i; \mathbf{z}).$$

e. *beste antwoord potentiaal* *(voor* Γ*) als voor elke* $i \in N$ *en* $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$

$$R_i(\mathbf{z}) = \mathrm{argmax}_{x_i \in X_i} P(x_i; \mathbf{z}).$$

f. *pseudo potentiaal* *(voor* Γ*) als voor elke* $i \in N$ *en* $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$

$$R_i(\mathbf{z}) \supseteq \mathrm{argmax}_{x_i \in X_i} P(x_i; \mathbf{z}).$$

g. *quasi potentiaal* *(voor* Γ*) als*

$$E = \mathrm{argmax}\, P.$$

h. *zwakke quasi potentiaal* *(voor* Γ*) als*

$$\mathrm{argmax}\, P \subseteq E. \;\diamond$$

Dus P hierboven is een reëelwaardige functie die op de een of andere manier voor elke speler de uitbetalingsverandering ten gevolge van een verandering van zijn strategie uitdrukt; heel duidelijk is dat te zien in geval van een exacte potentiaal waar de uitbetalingssverandering gelijk is aan de potentiaalverandering. In zekere zin vervangt P de n uitbetalingsfuncties. Een grote stap voorwaarts is het idee van Kukushkin [12] om ook binaire relaties als potentiaal toe te laten; met $\rhd$ als in (1) definieerde hij:

Definitie 7 *Beschouw een spel in strategische vorm* $\Gamma = (X_1, \ldots, X_n; f_1, \ldots, f_n)$*. Een irreflexieve transitieve binaire relatie* $\succ$ *op* $\mathbf{X}$ *heet een* *gegeneraliseerde beste antwoord potentiaal* *(voor* Γ*) als voor alle* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{X}$

$$\mathbf{b} \rhd \mathbf{a} \;\Rightarrow\; \mathbf{b} \succ \mathbf{a}. \;\diamond$$

Het kan geen kwaad nog even snel op te merken: $\rhd$ hoeft niet transitief te zijn.

Terminologie: Γ heet een exact potentiaalspel als er een exacte potentiaal voor Γ bestaat, etc. Verder zullen we ook wel eens kortweg van potentiaal spreken. We bedoelen dan een van de acht typen van bovenstaande potentialen; een potentiaal in de gevallen a–h hierboven heet nog numeriek. Een gegeneraliseerde beste antwoord potentiaal is een voorbeeld van een ordenings potentiaal. En verder zullen we ook wel eens kortweg van potentiaalspel spreken. We bedoen dan daarmee een van de acht typen van bovenstaande potentiaalspelen.

3.2 Hiërarchie

We gaan nu symbolen uitdelen voor de bovenstaande acht klassen van potentiaalspelen. Verder vermelden geven we even de referenties van de artikels waar zo'n klasse voor het eerst besproken werd.

- Exacte potentiaalspelen: $\mathcal{E}$; [16].
- Gewogen potentiaalspelen: $\mathcal{W}$; [16].
- Ordinale potentiaalspelen: $\mathcal{O}$; [16].
- Gegeneraliseerde ordinale potentiaalspelen: $\mathcal{G}$; [16].
- Beste antwoord potentiaalspelen: $\mathcal{B}$; [24].
- Pseudo potentiaalspelen: $\mathcal{P}$; [1].
- Gegeneraliseerde beste antwoord potentiaalspelen: $\mathcal{C}$; [12].
- Quasi potentiaalspelen: $\mathcal{Q}$; [20].
- Zwakke quasi potentiaalspelen: $\mathcal{Z}$; [6].

Het zij duidelijk dat elke exacte potentiaal een gewone potentiaal is, dat elke gewogen potentiaal een ordinale potentiaal, dat elke ordinale potentiaal een gegeneraliseerde ordinale potentiaal is en dat elke quasi potentiaal en zwakke quasi potentiaal is. Verder is elke beste antwoord potentiaal een pseudo potentiaal. Ook is elke gegeneraliseerde ordinale potentiaal een zwakke quasi potentiaal: inderdaad, stel P is een gegeneraliseerde ordinale potentiaal en stel $\mathbf{e}$ is een maximaliseerder van P. Dan voor alle $i \in N$ en $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ volgt $P(e_i; \mathbf{e}_{\hat{\imath}}) \geq P(x_i; \mathbf{e}_{\hat{\imath}})$. Omdat P een gegeneraliseerde ordinale potentiaal is, volgt voor alle $i \in N$ en $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ dat $f(e_i; \mathbf{e}_{\hat{\imath}}) \geq f(x_i; \mathbf{e}_{\hat{\imath}})$. Dus $\mathbf{e}$ is, zoals gewenst, een nash evenwicht Tenslotte: elke pseudo potentiaal is een zwakke quasi potentiaal: inderdaad, stel P is een pseudo potentiaal en stel $\mathbf{e}$ is een maximaliseerder van P. Dan voor alle $i \in N$ volgt $e_i = \text{argmax}_{x_i \in X_i} P(x_i; \mathbf{e}_{\hat{\imath}})$. Omdat P een pseudo potentiaal is, volgt voor alle $i \in N$ dat $e_i \in R_i(\mathbf{e}_{\hat{\imath}})$ en dus dat $\mathbf{e}$ een nash evenwicht is.

Verder is het eenvoudig in te zien dat als voor alle $i \in N$, $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$ en $a_i, b_i \in X_i$

$$f_i(a_i; \mathbf{z}) < f_i(b_i; \mathbf{z}) \;\Leftrightarrow\; P(a_i; \mathbf{z}) < P(b_i; \mathbf{z}),$$

i.e. als P een ordinale potentiaal is, dat dan voor alle $i \in N$, $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$ en $a_i, b_i \in X_i$ zelfs

$$\begin{aligned}
f_i(a_i; \mathbf{z}) > f_i(b_i; \mathbf{z}) &\;\Leftrightarrow\; P(a_i; \mathbf{z}) > P(b_i; \mathbf{z}); && (3)\\
f_i(a_i; \mathbf{z}) \leq f_i(b_i; \mathbf{z}) &\;\Leftrightarrow\; P(a_i; \mathbf{z}) \leq P(b_i; \mathbf{z}); && (4)\\
f_i(a_i; \mathbf{z}) \geq f_i(b_i; \mathbf{z}) &\;\Leftrightarrow\; P(a_i; \mathbf{z}) \geq P(b_i; \mathbf{z}); && (5)\\
f_i(a_i; \mathbf{z}) = f_i(b_i; \mathbf{z}) &\;\Leftrightarrow\; P(a_i; \mathbf{z}) = P(b_i; \mathbf{z}). && (6)
\end{aligned}$$

(5) impliceert dat elke ordinale potentiaal een beste antwoord potentiaal is.

Resumerend:

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{Z}; \tag{7}$$
$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{Z}; \tag{8}$$
$$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Z}. \tag{9}$$

Men kan deze inclusies zowel op spelniveau als potentiaal niveau interpreteren. Bijvoorbeeld $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{W}$ als: een exacte potentiaal is een gewogen potentiaal of een exact potentiaalspel is een gewogen potentiaalspel. Ook geldt

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C},$$

maar deze inclusie daarbij wel slechts op spelniveau te interpreteren; het andere niveau maakt geen zin. Hier is een bewijsje: stel P is een beste antwoord potentiaal. Definieer de relatie $\succ$ op $\mathbf{X}$ als volgt: $\mathbf{b} \succ \mathbf{a}$ betekent $P(\mathbf{b}) > P(\mathbf{a})$. Het is duidelijk dat $\succ$ irreflexief en transitief is. Om aan te tonen dat $\succ$ een gegeneraliseerde beste antwoord potentiaal is, nemen we aan dat we strategieprofielen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ hebben met $\mathbf{b} \rhd \mathbf{a}$. Zij $i \in N$ zodanig dat $\mathbf{b} \rhd_i \mathbf{a}$. Zij $\mathbf{z} = \mathbf{a}_{\hat{\imath}} (= \mathbf{b}_{\hat{\imath}})$. Er volgt $b_i \in R_i(\mathbf{z})$ en $a_i \notin R_i(\mathbf{z})$. Omdat P een beste antwoord potentiaal is, volgt $b_i \in \mathrm{argmax}_{x_i \in X_i} P(x_i; \mathbf{z})$ en $a_i \notin \mathrm{argmax}_{x_i \in X_i} P(x_i; \mathbf{z})$. Dus $P(\mathbf{b}) > P(\mathbf{a})$ volgt en vandaar zoals gewenst, $\mathbf{b} \succ \mathbf{a}$.

Vooral de klasse van pseudo potentiaalspelen is groot. Noch groter dan deze is de klasse van geneste potentiaalspelen ([23]).

3.3 Elk eindig potentiaalspel heeft een nash evenwicht

Het volgende resultaat maakt tamelijk duidelijk dat potentiaalspelen interessant zijn.

Stelling 1 1. *Elke numerieke potentiaal is een zwakke quasi potentiaal, i.e. elke maximaliseerder van een numerieke potentiaal is een nash evenwicht.*

2. *Beschouw een spel in strategische vorm met eigenlijke beste antwoord corresponenties. Als $\succ$ een gegeneraliseerde beste antwoord potentiaal is, dan is elk maximaal element[10] van $\succ$ een nash evenwicht.*

3. *Elk eindig potentiaalspel heeft een nash evenwicht.* $\diamond$

Bewijs.— 1. Dit hebben we met (7) - (9) al hierboven bewezen.

2. Stel $\mathbf{a}$ is een maximaal element van een gegeneraliseerde beste antwoord potentiaal $\succ$. Dus is er geen $\mathbf{b}$ met $\mathbf{b} \succ \mathbf{a}$. Dit impliceert dat er geen $\mathbf{b}$ met $\mathbf{b} \rhd \mathbf{a}$ is. Propositie 2(3) garandeert dat $\mathbf{a}$ een nash evenwicht is.

[10]Deze notie is, voor zover de auteur weet, in de literatuur over relaties slechts gedefinieerd voor reflexieve transitieve relaties. Maar niks belet ons voor een willekeurige binaire relatie R op een verzameling X te definiëren: een element $a \in X$ heet maximaal als er geen $b \in X$ is met bRa.

3. Voor een potentiaalspel met een numerieke potentiaal P volgt dat uit deel 1 omdat P een maximaliseerder heeft. En voor het geval van de ordeningspotentiaal $\succ$ uit deel 2 omdat er een maximaal element bestaat.[11] Q.e.d.

Het is goed om op te merken dat zelfs voor een eindig spel met een exacte potentiaal P een nash evenwicht niet een maximaliseerder van P hoeft te zijn. Anders gezegd: een eindig exact potentiaalspel is niet per se een quasi potentiaalspel.

4 Verbeteringsdynamica

4.1 Paden

Beschouw een spel in strategische vorm $(X_1, \ldots, X_n, f_1, \ldots, f_n)$.

Een pad (in $\mathbf{X}$) is een familie $\gamma = (\mathbf{x}^l)_{l \in I_\gamma}$ in $\mathbf{X}$ waar $I_\gamma = \{1, 2, \ldots\}$ of $I_\gamma = \{1, \ldots, k\}$ met $k \geq 1$ met de eigenschap dat voor alle $l \in I_\gamma$ met $l + 1 \in I_\gamma$ de strategieprofielen $\mathbf{x}^l$ en $\mathbf{x}^{l+1}$ in slechts één coördinaat, zeg de $i(l)$-de verschillen:

$$x_{i(l)}^{l+1} \neq x_{i(l)}^l.$$

Dus (in cartesisch product notatie) $\gamma = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots)$ (oneindig pad) of $\gamma = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k)$ (eindig pad). Een pad $\gamma = (\mathbf{x}^1)$ heet triviaal.

Voor een pad $\gamma = (\mathbf{x}^l)_{l \in I_\gamma}$ heet $\mathbf{x}^1$ het beginpunt van γ. En voor een eindig pad $\gamma = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k)$ heet $\mathbf{x}^k$ het eindpunt van γ. Een pad γ heet cyclisch (of gesloten) indien het eindig is en het beginpunt gelijk is aan het eindpunt. Een pad heet acyclisch indien het eindig is en het beginpunt ongelijk aan het eindpunt is.[12] Een cyclisch pad $\gamma = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k)$ heet simpel indien $\mathbf{x}^l \neq \mathbf{x}^m$ voor alle l, m met $1 \leq l < m \leq k - 1$; in dit geval zeggen we nog dat dit pad lengte $k - 1$ heeft. (Dus elk triviaal pad is cyclisch en simpel.) Merk op: als $\gamma = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k)$ een niet-triviaal cyclisch pad is, dat dan $k \geq 3$ is.

Een pad $\gamma = (\mathbf{x}^l)_{l \in I_\gamma}$ heet beste antwoord compatibel als voor alle l

$$x_{i(l)}^{l+1} \in R_{i(l)}(\mathbf{x}_{\widehat{i(l)}}^l).$$

Voor zo'n pad geldt natuurlijk voor alle l

$$f_{i(l)}(\mathbf{x}^{l+1})) = \max_{y_i \in X_{i(l)}} f_{i(l)}(y_i; \mathbf{x}_{\widehat{i(l)}}^l) \geq f_{i(l)}(\mathbf{x}^l).$$

[11] Inderdaad: neem een strategieprofiel $\mathbf{a}_1$. Als dat maximaal is, dan zijn we klaar. Als $\mathbf{a}_1$ niet maximaal is, dan is er een $\mathbf{a}_2$ met $\mathbf{a}_2 \succ \mathbf{a}_1$. Omdat $\succ$ irreflexief is, is $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{a}_1$. Als $\mathbf{a}_2$ maximaal is, dan zijn we klaar. Als $\mathbf{a}_2$ niet maximaal is, dan is er een $\mathbf{a}_2$ met $\mathbf{a}_3 \succ \mathbf{a}_2$ en hebben we $\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{a}_2$. Omdat $\succ$ transitief is, is ook $\mathbf{a}_3 \succ \mathbf{a}_1$ en hebben we $\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{a}_1$. Etcetera. Omdat $\mathbf{X}$ eindig is, moet dit proces stoppen, zeg bij $\mathbf{x}^l$. $\mathbf{x}^l$ is dan dus maximaal.

[12] Opgelet: een oneindig pad is niet cyclisch en is ook niet acyclisch. En een eindig pad is niet cyclisch dan en slechts dan als het acyclisch is.

4.2 Verbeteringspaden

Als we een pad $(\mathbf{x}^l)$ hebben, dan verandert in elk strategieprofiel $\mathbf{x}^k$ in dat pad dat geen eindpunt is slechts speler $i(k)$ zijn strategie waardoor strategieprofiel $\mathbf{x}^{k+1}$ ontstaat. Interesssante veranderingen zijn die waar de uitbetaling van die speler in $\mathbf{x}^{k+1}$ groter dan in $\mathbf{x}^k$ is. Verbeteringsdynamica houdt zich bezig met paden waar dat voor al zulke k geldt. Het kan zijn, maar hoeft niet, dat $x_{i(k)}^{k+1}$ een beste antwoord tegen de strategieën in $\mathbf{x}^k$ van de andere spelers is. Als dat voor all k geldt, dan spreekt men ook nog wel van beste antwoord dynamica. De volgende definitie maakt dit formeel.

Definitie 8 *Een pad $\gamma = (\mathbf{x}^l)$ heet*[13]

a. <u>verbeteringspad</u> als $f_{i(l)}(\mathbf{x}^{l+1}) > f_{i(l)}(\mathbf{x}^l)$ voor alle l;

b. <u>zwak verbeteringspad</u> als $f_{i(l)}(\mathbf{x}^{l+1}) \geq f_{i(l)}(\mathbf{x}^l)$ voor alle l en in geval γ niet triviaal is de strikte ongelijkheid voor tenminste één l geldt. $\diamond$

Merk op: als $\gamma = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k)$ een niet-triviaal cyclisch verbeteringspad is, dat dan $k \geq 4$ is. Opgemerkt zij ook dat in het geval van $n = 2$, i.e. van twee spelers, er voor elk beste antwoord compatibel verbeteringspad γ geldt: $i(l) \neq i(l+1)$.

De volgende hiërarchie geldt:

$$\text{beste antw. compatibel verb. pad} \;\Rightarrow\; \text{verb. pad} \;\Rightarrow\; \text{zwak verb. pad},$$

$$\text{beste antw. comp. verb. pad} \;\Rightarrow\; \text{beste antw. comp. zwak verb. pad} \;\Rightarrow\; \text{zwak verb. pad}.$$

Verder geldt als alle beste antwoord correspondenties singletonwaardig zijn:[14]

$$\text{beste antwoord compatibel verb. pad} \Leftrightarrow \text{beste antwoord compatibel zwak verb. pad}.$$

Met de relatie $\triangleright_i$ krijgen we de volgende vertaling voor (beste antwoord compatibele) verbeteringspaden in termen van de geïntroduceerde binaire relaties.

Propositie 3 *Zij $\gamma = (\mathbf{x}^l)$ een pad.*

1. *γ is een verbeteringspad $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x}^{l+1} \triangleright_{i(l)}^{I} \mathbf{x}^l$ voor alle l $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x}^{l+1} \triangleright^{I} \mathbf{x}^l$ voor alle l.*

2. *γ is een beste antwoord compatibel verbeteringspad $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x}^{l+1} \triangleright_{i(l)} \mathbf{x}^l$ voor alle l $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x}^{l+1} \triangleright \mathbf{x}^l$ voor alle l.* $\diamond$

---

[13] Om de notaties wat minder zwaar te maken zullen we vaak in plaats van de notatie $(\mathbf{x}^l)_{l \in I_\gamma}$ simpelweg $(\mathbf{x}^l)$ noteren. Ook zullen we in plaats van dingen als "voor alle $l \in I_\gamma$ met $l+1 \in I_\gamma$" simpelweg "voor alle l" schrijven.

[14] Inderdaad: stel γ is een beste antwoord zwak verbeteringspad. We laten zien dat γ een verbeteringspad is. Fixeer l. Er geldt $f_{i(l)}(\mathbf{x}^{l+1}) \geq f_{i(l)}(\mathbf{x}^l)$. De ongelijkheid hier is zelfs strikt want anders zou $x_{i(l)}^l, x_{i(l)}^{l+1} \in R_{i(l)}(\mathbf{x}_{\widehat{i(l)}})$.

Bewijs.— 1. Dit zij duidelijk.

2. De tweede "⇔" zij duidelijk. Eerste "⇒": stel $\gamma = (\mathbf{x}^l)$ is een beste antwoord compatibel verbeteringspad. Fixeer l. Er geldt $\mathbf{x}^{l+1}_{\widehat{i(l)}} = \mathbf{x}^l_{\widehat{i(l)}}$ en $x^{l+1}_{i(l)} \in R_{i(l)}(\mathbf{x}^{l+1}_{\widehat{i(l)}})$. Omdat γ een verbeteringspad is, geldt $f_{i(l)}(\mathbf{x}^{l+1}) > f_{i(l)}(\mathbf{x}^l)$ en vandaar $x^l_{i(l)} \notin R_{i(l)}(\mathbf{x}^l_{\widehat{i(l)}})$.

Eerste "⇐": stel $\mathbf{x}^{l+1} \triangleright_{i(l)} \mathbf{x}^l$ voor alle l. (2) tezamen met deel 1 garandeert dat γ een verbeteringspad is. Omdat $x^{l+1}_{i(l)} \in R_{i(l)}(\mathbf{x}^{l+1}_{\widehat{i(l)}})$ is γ ook beste antwoord compatibel. Q.e.d.

Propositie 3 impliceert: als $(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k)$ een (beste antwoord compatibel) verbeteringspad is en $(\mathbf{x}^{k+1} \triangleright \mathbf{x}^k)$, $\mathbf{x}^{k+1} \triangleright^I \mathbf{x}^k$, dan is ook $(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1})$ een (beste antwoord compatibel) verbeteringspad.

Een verbeteringspad $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k)$ heet <u>maximaal</u> als er geen strategieprofiel $\mathbf{x}^{k+1}$ bestaat zodanig dat $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^{k+1})$ een verbeteringspad is. En, net zo, wat de andere verbeteringsnoties betreft. Dus bijvoorbeeld: een beste antwoord compatibel verbeteringspad $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k)$ is maximaal als er geen strategieprofiel $\mathbf{x}^{k+1}$ bestaat zodanig dat $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^{k+1})$ een beste antwoord compatibel verbeteringspad is.

Propositie 3 hebbend, merken we op dat een verbeteringspad $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k)$ maximaal is d.e.s.d.a. als er geen strategieprofiel $\mathbf{x}^{k+1}$ bestaat met $\mathbf{x}^{k+1} \triangleright^I \mathbf{x}^k$ en dat een beste antwoord compatibel verbeteringspad $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k)$ maximaal is d.e.s.d.a. als er geen strategieprofiel $\mathbf{x}^{k+1}$ bestaat met $\mathbf{x}^{k+1} \triangleright \mathbf{x}^k$.

Propositie 4 *1. Zij $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k)$ een verbeteringspad. Er geldt: $\mathbf{x}^k$ is een nash evenwicht ⇔ $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k)$ is een maximaal verbeteringspad.*

2. Stel de beste antwoord correspondenties zijn eigenlijk. Zij $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k)$ een beste antwoord compatibel verbeteringspad. Er geldt: $\mathbf{x}^k$ is een nash evenwicht ⇔ $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k)$ is een maximaal beste antwoord compatibel verbeteringspad. ⋄

Bewijs.— De "⇒" volgen nu uit Propositie 2.

1. "⇐": uit het ongerijmde. Dus stel $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k)$ is een maximaal verbeteringspad en $\mathbf{x}^k$ is geen nash evenwicht. Dan zijn er $i \in N$ en $y_i \in X_i$ met $f_i(y_i; \mathbf{x}^k_{\hat{i}}) > f_i(\mathbf{x}^k)$. Met $\mathbf{x}^{k+1} = (y_i; \mathbf{x}^k_{\hat{i}})$ is $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^{k+1})$ een verbeteringspad. Tegenspraak.

2. "⇐": uit het ongerijmde. Dus stel $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k)$ is een maximaal beste antwoord compatibel verbeteringspad en $\mathbf{x}^k$ is geen nash evenwicht. Dan is er $i \in N$ zodanig dat $x^k_i \notin R_i(\mathbf{x}^k_{\hat{i}})$. Omdat R_i eigenlijk is, is er een $y_i \in R_i(\mathbf{x}^k_{\hat{i}})$. Met $\mathbf{x}^{k+1} = (y_i; \mathbf{x}^k_{\hat{i}})$ is $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^{k+1})$ een beste antwoord compatibel verbeteringspad. Tegenspraak. Q.e.d.

Tenslotte merken we nog het volgende op voor een beste antwoord potentiaal P en beste antwoord compatibel zwak verbeteringspad $\gamma = (\mathbf{x}^l)$: voor alle l

$$P(\mathbf{x}^{l+1}) \geq P(\mathbf{x}^l), \tag{10}$$

$$f_{i(l)}(\mathbf{x}^{l+1}) > f_{i(l)}(\mathbf{x}^l) \;\Rightarrow\; P(\mathbf{x}^{l+1}) > P(\mathbf{x}^l). \tag{11}$$

Inderdaad: omdat $x^{l+1}_{i(l)} \in R_{i(l)}(\mathbf{x}^l_{\widehat{i(l)}})$ en P een beste antwoord potentiaal is, volgt $P(x^{l+1}_{i(l)}; \mathbf{x}^l_{\widehat{i(l)}}) \geq P(x^l_{i(l)}; \mathbf{x}^l_{\widehat{i(l)}})$, i.e. $P(\mathbf{x}^{l+1}) \geq P(\mathbf{x}^l)$. En als zelfs $f_{i(l)}(\mathbf{x}^{l+1}) > f_{i(l)}(\mathbf{x}^l)$, dan is $x^l_{i(l)} \notin R_{i(l)}(\mathbf{x}^l_{\widehat{i(l)}})$ en vandaar $P(x^{l+1}_{i(l)}; \mathbf{x}^l_{\widehat{i(l)}}) > P(x^l_{i(l)}; \mathbf{x}^l_{\widehat{i(l)}})$, i.e. $P(\mathbf{x}^{l+1}) > P(\mathbf{x}^l)$.

4.3 Eindige verbeteringseigenschappen

Definitie 9 *Een spel in strategische vorm heeft*

a. *de eindige zwakke verbeteringseigenschap als elk zwak verbeteringspad eindig is.*

b. *de eindige verbeteringseigenschap als elk verbeteringspad eindig is.*

c. *de eindige zwakke beste antwoord verbeteringseigenschap als elk beste antwoord compatibel zwak verbeteringspad eindig is.*

d. *de eindige beste antwoord verbeteringseigenschap als elk beste antwoord compatibel verbeteringspad eindig is.* $\diamond$

De volgende hiërarchie geldt:

eind. zwakke verb. eig. $\rightarrow$ eind. verb. eig. $\rightarrow$ eind. beste antwoord verb. eig.,

eind. zwakke verb. $\rightarrow$ eind. zwakke beste antw. verb. eig. $\rightarrow$ eind. beste antw. verb. eig.

Voorbeeld 1 *Beschouw het bimatrixspel*

$$\begin{pmatrix} -10;-10 & -25;0 \\ 0;-25 & -20;-20 \end{pmatrix}.$$

Men gaat snel na dat dit spel de eindige verbeteringseigenschap heeft. Het bimatrixpel

$$\begin{pmatrix} -1;1 & 1;-1 \\ 1;-1 & -1;1 \end{pmatrix}$$

daarentegen heeft deze eigenschap niet: $((1,1),(2,1),(2,2),(1,2),(1,1),(2,1),\ldots)$ *is een een oneindig verbeteringspad.*

Het bimatrixspel

$$\begin{pmatrix} 2;2 & 1;0 & 0;1 \\ 0;0 & 0;1 & 1;0 \end{pmatrix}$$

heeft, zoals men snel nagaat, de eindige beste antwoord verbeteringseigenschap, maar, omdat $((1,2),(1,3),(2,3),(2,2),(1,2),(1,3),\ldots)$ *een oneindig verbeteringspad is, niet de eindige verbeteringseigenschap.* $\diamond$

We zullen dadelijk (i.e. met Stelling 2) zien dat een eindig spel in strategische vorm met een der vier eindige verbeteringseigenschappen een nash evenwicht heeft.

4.4 Zwak acyclische spelen

Definitie 10 *Een spel in strategische vorm heet zwak acyclisch als voor elk strategieprofiel* $\mathbf{x}$ *er een eindig verbeteringspad bestaat met* $\mathbf{x}$ *als beginpunt en met een nash evenwicht als eindpunt.* $\diamond$

Dus elk zwak acyclisch spel heeft een nash evenwicht.

Propositie 5 *Een spel in strategische vorm waar elke speler een strikt dominante strategie heeft*[15] *is zwak acyclisch. Zelfs: voor elk strategieprofiel* $\mathbf{a}$ *bestaat er een eindig verbeteringspad met het strikt dominante nash evenwicht als eindpunt.* $\diamond$

Bewijs.— Definieer als volgt een pad $(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^m)$; zij n het aantal der spelers en $\mathbf{d}$ het strikt dominante evenwicht. Welnu, allereerst $\mathbf{x}^1 = \mathbf{a}$. Als $\mathbf{x}^1 = \mathbf{d}$, dan $m = 1$ en is $(\mathbf{x}^1)$ als gezocht. Stel nu $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{d}$. Zij k_1 de speler met de laagste nummer waarvoor zijn strategie in $\mathbf{x}^1$ niet strikt dominant is en definieer $\mathbf{x}^2$ door: $i(1) = k_1$ en $x^2_{i(1)} = d_{i(1)}$. Als $\mathbf{x}^2 = \mathbf{d}$, dan $m = 1$ en is $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ als gezocht. Stel nu $\mathbf{x}^2 \neq \mathbf{d}$. Zij k_2 de speler met de laagste nummer waarvoor zijn strategie in $\mathbf{x}^2$ niet strikt dominant is. Etcetera. Q.e.d.

Propositie 6 *In een spel in strategische vorm met de*

1. *eindige verbeteringseigenschap bestaat er voor elke* $\mathbf{x}^1 \in \mathbf{X}$ *een maximaal verbeteringspad met* $\mathbf{x}^1$ *als beginpunt.*
2. *eindige zwakke verbeteringseigenschap bestaat er voor elke* $\mathbf{x}^1 \in \mathbf{X}$ *een maximaal zwak verbeteringspad met* $\mathbf{x}^1$ *als beginpunt.*
3. *eindige beste antwoord verbeteringseigenschap bestaat er voor elke* $\mathbf{x}^1 \in \mathbf{X}$ *een maximaal beste antwoord verbeteringspad met* $\mathbf{x}^1$ *als beginpunt.*
4. *eindige zwakke beste antwoord verbeteringseigenschap bestaat er voor elke* $\mathbf{x}^1 \in \mathbf{X}$ *een maximaal zwak beste antwoord verbeteringspad met* $\mathbf{x}^1$ *als beginpunt.* $\diamond$

Bewijs.— 1. Uit het ongerijmde. Fixeer dus een strategieprofiel $\mathbf{x}^1$ en stel dat er geen maximaal verbeteringspad met $\mathbf{x}^1$ als beginpunt bestaat. Beschouw het verbeteringspad $(\mathbf{x}^1)$. Dit verbeteringspad is dus niet maximaal. Zij $\mathbf{x}^2$ een strategieprofiel zodanig $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ een verbeteringspad is. Dit verbeteringspad is dus niet maximaal. Zij $\mathbf{x}^3$ een strategieprofiel zodanig $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3)$ een verbeteringspad is. Omdat het spel de verbeteringseigenschap heeft, moet dit proces stoppen. Immers als het niet zou stoppen, dan zouden we op die manier een oneindig verbeteringspad kunnen construeren. Er bestaat dus een maximaal verbeteringspad met $\mathbf{x}^1$ als beginpunt. Tegenspraak.

2. Analoog aan het bewijs van deel 1.

3. Uit het ongerijmde. Fixeer dus een strategieprofiel $\mathbf{x}^1$ en stel dat er geen maximaal beste antwoord verbeteringspad met $\mathbf{x}^1$ als beginpunt bestaat. Beschouw het beste antwoord verbeteringspad $(\mathbf{x}^1)$. Dit verbeteringspad is dus niet maximaal. Zij $\mathbf{x}^2$ een

[15] Een gevangenendilemma bijvoorbeeld voldoet aan die eigenschap.

strategieprofiel zodanig $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ een beste antwoord verbeteringspad is. Dit verbeteringspad is dus niet maximaal. Zij $\mathbf{x}^3$ een strategieprofiel zodanig $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3)$ een beste antwoord verbeteringspad is. Omdat het spel de beste antwoord verbeteringseigenschap heeft, moet dit proces stoppen. Immers als het niet zou stoppen, dan zouden we op die manier een oneindig beste antwoord verbeteringspad kunnen construeren. Er bestaat dus een maximaal beste antwoord verbeteringspad met $\mathbf{x}^1$ als beginpunt. Tegenspraak.

4. Analoog aan het bewijs van deel 3. Q.e.d.

Stelling 2 *Een spel in strategische vorm*

1. *met de eindige verbeteringseigenschap is zwak acyclisch.*

2. *met de eindige zwakke verbeteringseigenschap is zwak acyclisch.*

3. *met eigenlijke beste antwoord correspondenties en de eindige beste antwoord verbeteringseigenschap is zwak acyclisch.*

4. *met eigenlijke beste antwoord correspondenties en de eindige zwakke beste antwoord verbeteringseigenschap is zwak acyclisch.* $\diamond$

Bewijs.— 1. Fixeer een strategieprofiel $\mathbf{x}^1$. Volgens Propositie 6(1) bestaat er een maximaal verbeteringspad met $\mathbf{x}^1$ als beginpunt. Het eindpunt van dat pad is volgens Propositie 4(1) een nash evenwicht.

2. Vanwege deel 1, omdat de eindige zwakke verbeteringseigenschap de eindige verbeteringseigenschap impliceert.

3. Fixeer een strategieprofiel $\mathbf{x}^1$. Volgens Propositie 6(3) bestaat er een een maximaal beste antwoord verbeteringspad met $\mathbf{x}^1$ als beginpunt. Het eindpunt van dat pad is volgens Propositie 4(2) een nash evenwicht.

4. Vanwege deel 3, omdat de eindige zwakke beste antwoord verbeteringseigenschap de eindige beste antwoord verbeteringseigenschap impliceert. Q.e.d.

Stelling 2 impliceert dat een eindig spel in strategische vorm met een der vier eindige verbeteringseigenschappen zwak acylisch is en dus een nash evenwicht heeft. Het omgekeerde hoeft niet te gelden. Bijvoorbeeld

$$\begin{pmatrix} 0;0 & 0;1 & 1;0 \\ 1;1 & 1;0 & 0;1 \end{pmatrix}$$

heeft een nash evenwicht, maar niet de eindige beste anwoord verbeteringseigenschap $((1,2),(2,2),(2,3),(1,3),(1,2),\ldots)$.

Omdat ook elk eindig potentiaalspel een nash evenwicht heeft, is een vraag die nu misschien opkomt: is er een relatie tussen specifieke potentiaalspelen en specifieke verbeteringseigenschappen? Een verdere interessante vraag: welke potentiaalspelen zijn zwak acyclisch? We komen daarop terug in onder andere Corollarium 1.

4.5 Eindige verbeteringseigenschappen versus acylicische paden

Propositie 7 *Beschouw de volgende uitspraken voor een spel in strategische vorm.*

a. Het spel heeft de eindige verbeteringseigenschap, i.e. elk verbeteringspad is eindig.

b. Elk eindig niet-triviaal verbeteringspad is acyclisch.

c. Er bestaat geen niet-triviaal cyclisch verbeteringspad.

Er geldt: $a \Rightarrow b \Leftrightarrow c$*. Indien het spel eindig is geldt* $a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c$*.* $\diamond$

Bewijs.— "$b \Leftrightarrow c$": evident.
"$a \Rightarrow c$": uit het ongerijmde. Dus stel uitspraak a is waar en $\gamma = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k)$ is een niet-triviaal cyclisch verbeteringspad; dit impliceert $k \geq 3$. Omdat $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^k$, geeft concatenatie (i.e. "aan elkaar plakken") het oneindige verbeteringspad $(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots)$. Tegenspraak.
"$c \Rightarrow a$": uit het ongerijmde. Dus stel uitspraak c is waar en $\gamma = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots)$ is een oneindig verbeteringspad. Omdat het spel eindig is, zijn er l, m met $l < m$ en $\mathbf{x}^l = \mathbf{x}^m$. Nu is $(\mathbf{x}^l, \ldots, \mathbf{x}^m)$ een eindig niet-triviaal cyclisch verbeteringspad. Tegenspraak. Q.e.d.

Propositie 8 *Beschouw de volgende uitspraken voor een spel in strategische vorm.*

a. Het spel heeft de eindige beste antwoord verbeteringseigenschap, i.e. elk beste antwoord compatibel verbeteringspad is eindig.

b. Elk eindig niet-triviaal beste antwoord compatibel verbeteringspad is acyclisch.

c. Er bestaat geen niet-triviaal cyclisch beste antwoord compatibel verbeteringspad.

Er geldt: $a \Rightarrow b \Leftrightarrow c$*. Indien het spel eindig is geldt* $a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c$*.* $\diamond$

Bewijs.— "$b \Leftrightarrow c$": evident.
"$a \Rightarrow c$": uit het ongerijmde. Dus stel uitspraak a is waar en $\gamma = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k)$ is een niet-trivaal cyclisch beste antwoord verbeteringspad; dit $k \geq 3$. Concatenatie geeft het oneindige beste antwoord verbeteringspad $(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots)$. Tegenspraak.
"$c \Rightarrow a$": uit het ongerijmde. Dus stel uitspraak c is waar en $\gamma = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots)$ is een oneindig beste antwoord compatibel verbeteringspad. Omdat het spel eindig is, zijn er l, m met $l < m$ en $\mathbf{x}^l = \mathbf{x}^m$. Nu is $(\mathbf{x}^l, \ldots, \mathbf{x}^m)$ een eindig niet-triviaal cyclisch beste antwoord compatibel verbeteringspad. Tegenspraak. Q.e.d.

Propositie 9 *Beschouw de volgende uitspraken voor een spel in strategische vorm.*

a. Het spel heeft de eindige zwakke verbeteringseigenschap, i.e. elk zwak verbeteringspad is eindig.

b. Elk eindig niet-triviaal zwak verbeteringspad is acyclisch.

c. Er bestaat geen niet-triviaal cyclisch zwak verbeteringspad.

Er geldt: $a \Rightarrow b \Leftrightarrow c$. $\diamond$

Bewijs.— "$b \Leftrightarrow c$": evident.
"$a \Rightarrow c$": uit het ongerijmde. Dus stel uitspraak a is waar en $\gamma = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k)$ is een niet-trivaal cyclisch zwak verbeteringspad. Dit impliceert $k \geq 3$. Concatenatie geeft het oneindige zwakke verbeteringspad $(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots)$. Tegenspraak. Q.e.d.

Propositie 10 *Beschouw de volgende uitspraken voor een spel in strategische vorm.*

a. Het spel heeft de eindige zwakke beste antwoord verbeteringseigenschap, i.e. elk beste antwoord zwak verbeteringspad is eindig.

b. Elk eindig niet-triviaal beste antwoord zwak verbeteringspad is acyclisch.

c. Er bestaat geen niet-triviaal cyclisch beste antwoord zwak verbeteringspad.

Er geldt: $a \Rightarrow b \Leftrightarrow c$. $\diamond$

Bewijs.— "$b \Leftrightarrow c$": evident.
"$a \Rightarrow c$": uit het ongerijmde. Dus stel uitspraak a is waar en $\gamma = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k)$ is een niet-trivaal cyclisch beste antwoord zwak verbeteringspad. Dit impliceert $k \geq 3$. Concatenatie geeft het oneindige beste antwoord zwakke verbeteringspad $(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots)$. Tegenspraak. Q.e.d.

5 Exacte en gewogen potentiaalspelen

Deze paragraaf behandelt exacte potentiaalspelen. Het is recht-toe-recht-aan de resultaten hier te generaliseren voor gewogen potentiaalspelen.[16]

5.1 Relatie met coördinatiespel

Het is evident dat elk coördinatiespel een exact potentiaalspel is en dat elk dummyspel een exact potentiaalspel is.

Propositie 11 *Beschouw een spel in strategische vorm* $\Gamma = (X_1, \ldots, X_n; f_1, \ldots, f_n)$, $P : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *en de volgende twee uitspraken.*

a. P *is een exacte potentiaal voor* Γ.

b. Het coördinatiespel $\Gamma' = (X_1, \ldots, X_n; P, \ldots, P)$ *heeft dezelfde beste antwoord correspondenties als* Γ *(en dus ook dezelfde nash evenwichten als* Γ*).* $\diamond$

[16] Merk daartoe bijvoorbeeld op: als $(X_1, \ldots, X_n; f_1, \ldots, f_n)$ een gewogen potentiaalspel is, dan is $(X_1, \ldots, X_n; f_1/w_1, \ldots, f_n/w_n))$ een exact potentiaalspel.

Er geldt "a ⇒ b".

Bewijs.— Stel a geldt. Voor de beste antwoord correspondentie R'_i van speler i in Γ' geldt $R'_i(\mathbf{z}) = \text{argmax}_{x_i \in X_i} P(x_i; \mathbf{z})$. Omdat P een exacte potentiaal voor Γ is, is P een beste antwoord potentiaal voor Γ en volgt $R_i(\mathbf{z}) = \text{argmax}_{x_i \in X_i} P(x_i; \mathbf{z}) = R'_i(\mathbf{z})$. Q.e.d.

In geval van een exacte potentiaal is het best mogelijk dat er een nash evenwicht is dat geen maximaliseerder van P is. Dat zien we bijvoorbeeld aan het exacte potentiaalspel $\begin{pmatrix} 5;2 & -1;-2 \\ -5;-4 & 1;4 \end{pmatrix}$ met potentiaal $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$. (We merken dat voor een quasi potentiaal P er per definitie geldt $E = \text{argmax}(P)$.)

5.2 Verbeteringseigenschappen

We hebben met Stelling 1(3) al gezien dat elk eindig potentiaalspel een nash evenwicht heeft. De volgende propositie impliceert (dankzij Stelling 2(1)) dit resultaat nog eens voor eindige exacte potentiaalspelen.

Propositie 12 *Elk eindig exact potentiaalspel heeft de eindige verbeteringseigenschap.* $\diamond$

Bewijs.— Uit het ongerijmde. Dus stel dat $\gamma = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots)$ een oneindig verbeteringspad is. Dit betekent $f_{i(l)}(\mathbf{x}^{l+1}) > f_{i(1)}(\mathbf{x}^l)$ voor alle $l \geq 1$. Omdat het spel een exact potentiaalspel is, volgt $P(\mathbf{x}^1) < P(\mathbf{x}^2) < \cdots$. Dat is echter onmogelijk omdat het spel eindig is. Q.e.d.

Omdat een eindig exact potentiaalspel de eindige verbeteringseigenschap heeft, heeft zo'n spel geen niet-triviaal cyclisch verbeteringspad. Dat resultaat geldt zelfs zonder de eindigheid van het spel:

Propositie 13 *In een exact potentiaalspel bestaat er geen niet-triviaal cyclisch verbeteringspad.* $\diamond$

Bewijs.— Stel $\gamma = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k)$ is een niet-triviaal verbeteringspad. We moeten laten zien dat $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^k$ is. Fixeer een exacte potentiaal P. Omdat $f_{i(l)}(\mathbf{x}^{l+1}) > f_{i(l)}(\mathbf{x}^l)$ ($l \in I_\gamma$), volgt $P(\mathbf{x}^k) > \cdots > P(\mathbf{x}^1)$. Omdat $k \geq 2$, impliceert dit dat $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^k$. Q.e.d.

Propositie 14 *De volgende uitspraken voor een spel in strategische vorm Γ en een functie $P : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ zijn equivalent.*

a. P is een exacte potentiaal voor Γ.

b. Voor elke $i \in N$ bestaat er een functie $h_i : \mathbf{X}_{\hat{\imath}} \to \mathbb{R}$ zodanig dat voor alle $i \in N$ en $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$

$$f_i(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}) + h_i(\mathbf{x}_{\hat{\imath}}). \ \diamond$$

Bewijs.— "a $\Rightarrow$ b": fixeer $i \in N$. Definieer de functie $h_i : \mathbf{X}_{\hat{\imath}} \to \mathbb{R}$ door

$$h_i(\mathbf{z}) = f_i(a_i; \mathbf{z}) - P(a_i; \mathbf{z}).$$

Nu geldt, zoals gewenst, voor alle $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}) = f_i(x_i; \mathbf{x}_{\hat{\imath}}) &= (f_i(x_i; \mathbf{x}_{\hat{\imath}}) - f_i(a_i; \mathbf{x}_{\hat{\imath}})) + f_i(a_i; \mathbf{x}_{\hat{\imath}}) \\ &= P(x_i; \mathbf{x}_{\hat{\imath}}) - P(a_i; \mathbf{x}_{\hat{\imath}}) + f_i(a_i; \mathbf{x}_{\hat{\imath}}) = P(\mathbf{x}) + h_i(\mathbf{x}_{\hat{\imath}}). \end{aligned}$$

"b $\Rightarrow$ a": voor elke $i \in N$, $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$ en $a_i, b_i \in X_i$ geldt, zoals gewenst,

$$f_i(a_i; \mathbf{z}) - f_i(b_i; \mathbf{z}) = P(a_i; \mathbf{z}) + h_i(\mathbf{z}) - (P(b_i; \mathbf{z}) + h_i(\mathbf{z})) = P(a_i; \mathbf{z}) - P(b_i; \mathbf{z}).$$ Q.e.d.

De volgende propositie is een variant van de vorige.

Propositie 15 *Een spel in strategische vorm $(X_1, \dots, X_n; f_1, \dots, f_n)$ is een exact potentiaalspel dan en slechts dan als er functies $c : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ en $d_i : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ $(i \in N)$ bestaan zodanig dat*

a. $f_i = c + d_i$ *voor alle* $i \in N$,

b. $(X_1, \dots, X_n; c, \dots, c)$ *is een coördinatiespel,*

c. $(X_1, \dots, X_n; d_1, \dots, d_n)$ *is een dummyspel.* $\diamond$

Bewijs.— Stel aan a–c is voldaan. Nu is c een exacte potentiaal voor $(X_1, \dots, X_n; f_1, \dots, f_n)$. Inderdaad: voor elke $i \in N$, $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$ en $a_i, b_i \in X_i$ geldt

$$f_i(a_i; \mathbf{z}) - f_i(b_i; \mathbf{z}) = c(a_i; \mathbf{z}) + d_i(a_i; \mathbf{z}) - c(b_i; \mathbf{z}) - d_(b_i; \mathbf{z}) = c(a_i; \mathbf{z}) - c(b_i; \mathbf{z}).$$

Nu stel $(X_1, \dots, X_n; f_1, \dots, f_n)$ is een exact potentiaalspel. Zij P een exacte potentiaal voor dat spel. Voor elke $i \in N$ geldt $f_i = P + (f_i - P)$. Neem $c := P$ en $d_i := f_i - P$. Merk tenslotte op dat voor elke $i \in N$, $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_\imath$ en $a_i, b_i \in X_i$

$$d_i^{(\mathbf{z})}(b_i) - d_i^{(\mathbf{z})}(a_i) = f_i^{(\mathbf{z})}(b_i) - P_i^{(\mathbf{z})}(b_i) - f_i^{(\mathbf{z})}(a_i) + P_i^{(\mathbf{z})}(a_i) = 0.$$ Q.e.d.

Stelling 3 *Als een spel in strategische vorm exacte potentialen P en Q heeft, dan is $P - Q$ constant.* $\diamond$.

Bewijs.— De definitie van een exacte potentiaal impliceert dat $f_i - P$ en $f_i - Q$ onafhankelijk van $x_i \in X_i$ zijn. Dus ook $P - Q = f_i - Q - (f_i - P)$ is onafhankelijk van $x_i \in X_i$. Omdat dit voor elke i geldt, volgt dat $P - Q$ constant is. Q.e.d.

Voor een eindig pad $\gamma = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k)$ zij

$$L(\gamma) := \sum_{l=1}^{k-1} \Big(f_{i(l)}(\mathbf{x}^{l+1}) - f_{i(l)}(\mathbf{x}^l) \Big).$$

Stelling 4 *Voor een spel in strategische vorm* Γ *zijn de volgende uitspraken equivalent:*

a. Γ *is een exact potentiaalspel.*

b. $L(\gamma) = 0$ *voor alle cyclische paden* γ.

c. $L(\gamma) = 0$ *voor alle simpele cyclische paden* γ.

d. $L(\gamma) = 0$ *voor alle simpele cyclische paden* γ *van lengte* 4. $\diamond$

Bewijs.— Zie [16]. Q.e.d.

De volgende propositie geeft een formule waarmee we snel kunnen controleren of een 2×2-bimatrixspel een exact potentiaalspel is.

Propositie 16 *Een spel in strategische vorm* $(\{0,1\}, \{0,1\}; f_1, f_2)$ *is een exact potentiaalspel dan en slechts dan als*

$$(f_1(1,0) - f_1(0,0)) + (f_2(1,1) - f_2(1,0))$$

$$+(f_1(0,1) - f_1(1,1)) + (f_2(0,0) - f_2(0,1)) = 0. \ \diamond$$

Bewijs.— Volgens Stelling 4 is het spel een exact potentiaalspel dan en slechts dan als $L(\gamma) = 0$ voor alle simpele cyclische paden γ van lengte 4. Uitwerken van deze conditie levert het gewenste resultaat. Hier zijn enkele details: er zijn precies 8 simpele cyclische paden van lengte 4. Eén van die paden is $\gamma_1 = ((0,0), (1,0), (1,1), (0,1), (0,0))$ en er geldt $L(\gamma_1) = (f_1(1,0)-f_1(0,0))+(f_2(1,1)-f_2(1,0))+(f_1(0,1)-f_1(1,1))+(f_2(0,0)-f_2(0,1))$. Verder als γ een van deze acht paden is, dan geldt $L(\gamma) = L(\gamma_1)$ of $L(\gamma) = -L(\gamma_1)$. Q.e.d.

Propositie 17 *Stel elke strategieverzameling* cX_i *is een reëel interval, elke uitbetalingsfunctie* $f_i : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *is continu partieel differentieerbaar en* $P : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$. *Dan:* P *is een exacte potentiaal* $\Leftrightarrow$ *[*P *is continu partieel differentieerbaar en* $D_i f_i = D_i P$ *voor alle* $i \in N$*].* $\diamond$

Bewijs.— "$\Leftarrow$": fixeer $i \in N$, $a_i, b_i \in X_i$ en $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$. Omdat $Df_i^{(\mathbf{z})}$ en $D_i P$ continu zijn, volgt, zoals gewenst, $f_i(a_i; \mathbf{z}) - f_i(b_i; \mathbf{z}) = f_i^{(\mathbf{z})}(a_i) - f_i^{(\mathbf{z})}(b_i) = \int_{b_i}^{a_i} Df_i^{(\mathbf{z})}(\xi)\, d\xi = \int_{b_i}^{a_i} D_i f_i(\xi; \mathbf{z})\, d\xi = \int_{b_i}^{a_i} D_i P(\xi; \mathbf{z})\, d\xi = P(a_i; \mathbf{z}) - P(b_i; \mathbf{z})$.

"$\Rightarrow$": fixeer $i \in N$ en $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$. We moeten bewijzen dat $P_i^{(\mathbf{z})}$ continu differentieerbaar is en dat $Df_i^{(\mathbf{z})} = DP_i^{(\mathbf{z})}$. Welnu dit volgt meteen uit de definitie van exacte potentiaal en de continuïteit van $Df_i^{(\mathbf{z})}$. Q.e.d.

Stelling 5 *Beschouw een spel in strategische vorm* Γ *waar elke strategieverzameling* X_i *een open reëel interval is en elke* $f_i : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *twee keer continu differentieerbaar is. Dan:*

Γ is een exact potentiaalspel dan en slechts dan als $D_i D_j f_i = D_j D_i f_j$ voor alle $i, j \in N$. In dat geval zij $P : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ wel-gedefinieerd[17] *door*

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} \int_0^1 \gamma'(z) D_i f_i(\gamma(z))\, dz$$

waar $\gamma : [0,1] \to \mathbf{X}$ stuksgewijs continu differentieerbaar is met $\gamma(0) = \mathbf{x}$ en $\gamma(1) = \mathbf{b}$ en $\mathbf{b} \in \mathbf{X}$ gefixeerd is. Deze P is een exacte potentiaal. $\diamond$

Bewijs.— Stel Γ is een exact potentiaalspel. Fixeer een exacte potentiaal P. Propositie 17 garandeert dat P continu partieel differentieerbaar is en dat $D_i f_i = D_i P$ voor alle $i \in N$. Fixeer $i, j \in N$. Er volgt dat f_i, f_j en P twee keer continu partieel differentieerbaar zijn. Daarmee vinden we $D_i D_j f_i = D_j D_i f_i = D_j D_i P = D_i D_j P = D_i D_j f_j = D_j D_i f_j$.

Nu stel dat $D_i D_j f_i = D_j D_i f_j$ voor alle $i, j \in N$. Beschouw het vectorveld $F : \mathbf{X} \to \mathbb{R}^n$ gedefinieerd door $F = (D_1 f_1, \ldots, D_n f_n)$. Merk op dat $\mathbf{X}$ open en enkelvoudig samenhangend is en dat F continu differentieerbaar is. Omdat $D_i F_j = D_j F_i$, volgt uit de theorie der vectormaximalisatie dat er een twee keer continu differentieerbare scalaire potentiaal voor F bestaat, i.e. een twee keer continu differentieerbare $P : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ met $F = (D_1 P, \ldots, D_n P)$, dus met $D_i f_i = D_i P$. Propositie 17 garandeert dat P een exacte potentiaal is. Dus Γ is een exact potentiaalspel. Q.e.d.

5.3 Bilaterale symmetrische interactie spelen

Het speltype in de volgende definitie werd geïntroduceerd in [22].

Definitie 11 *Een spel in strategische vorm heet een <u>bilateraal symmetrisch interactie spel</u> als er voor alle $i, j \in N$ met $i \neq j$ functies $w_{ij} : X_i \times X_j \to \mathbb{R}$ en $h_i : X_i \to \mathbb{R}$ bestaan zodanig dat voor alle $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$*

$$w_{ij}(x_i, x_j) = w_{ji}(x_j, x_i) \ (i, j \in N),$$

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} w_{ij}(x_i, x_j) - h_i(x_i). \ \diamond$$

Opgepast: een bilateraal symmetrisch interactie spel hoeft niet symmetrisch te zijn. "Symmetrisch" in de naamgeving van het spel slaat er slechts op dat er symmetrische interacties, i.e. de $w_{ij}(x_i, x_j)$, zijn. Ze zijn een aanwinst voor de speltheorie, vooral vanwege:

Stelling 6 *Elk bilateraal symmetrisch interactie spel is een exact potentiaal spel. Een exacte potentiaal wordt gegeven door $P(\mathbf{x}) = \sum_{k<l} w_{kl}(x_k, x_l) - \sum_k h_k(x_k)$.* $\diamond$

[17] In dat verband merk op dat elke $P(\mathbf{x})$ onafhankelijk van de keuze van γ is.

Bewijs.— Allereerst merk op dat voor gegeven $i \in N$

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{k<l, k\neq i} w_{kl}(x_k, x_l) + \sum_{i<l} w_{il}(x_i, x_l) - h_i(x_i) - \sum_{k\neq i} h_k(x_k)$$

$$= \sum_{k<l, k\neq i, l\neq i} w_{kl}(x_k, x_l) + \sum_{k<i, k\neq i} w_{ki}(x_k, x_i) + \sum_{i<l} w_{il}(x_i, x_l) - h_i(x_i) - \sum_{k\neq i} h_k(x_k)$$

$$= \sum_{k<l, k\neq i, l\neq i} w_{kl}(x_k, x_l) + \sum_{k<i} w_{ki}(x_k, x_i) + \sum_{i<k} w_{ik}(x_i, x_k) - h_i(x_i) - \sum_{k\neq i} h_k(x_k)$$

$$= \sum_{k<l, k\neq i, l\neq i} w_{kl}(x_k, x_l) + \sum_{k<i} w_{ki}(x_k, x_i) + \sum_{i<k} w_{ki}(x_k, x_i) - h_i(x_i) - \sum_{k\neq i} h_k(x_k)$$

$$= \sum_{k<l, k\neq i, l\neq i} w_{kl}(x_k, x_l) + \sum_{k\neq i} w_{ki}(x_k, x_i) - h_i(x_i) - \sum_{k\neq i} h_k(x_k).$$

Nu fixeer $i \in N$, $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$ en $a_i, b_i \in X_i$. We moeten laten zien dat $P(b_i;\mathbf{z}) - P(a_i;\mathbf{z}) = f_i(b_i;\mathbf{z}) - f_i(a_i;\mathbf{z})$. Welnu,

$$P(b_i;\mathbf{z}) - P(a_i;\mathbf{z})$$

$$= \Big(\sum_{k<l, k\neq i, l\neq i} w_{kl}(z_k, z_l) + \sum_{k\neq i} w_{ki}(z_k, b_i) - h_i(b_i) - \sum_{k\neq i} h_k(z_k). \Big)$$

$$-\Big(\sum_{k<l, k\neq i, l\neq i} w_{kl}(z_k, z_l) + \sum_{k\neq i} w_{ki}(z_k, a_i) - h_i(a_i) - \sum_{k\neq i} h_k(z_k). \Big)$$

$$= \sum_{k\neq i} (w_{ki}(z_k, b_i) - w_{ki}(z_k, a_i)) + h_i(a_i) - h_i(b_i).$$

En

$$f_i(b_i;\mathbf{z}) - f_i(a_i;\mathbf{z})$$

$$= \Big(\sum_{k\neq i} w_{ik}(b_i, z_k) - h_i(b_i) \Big) - \Big(\sum_{k\neq i} w_{ik}(a_i, z_k) - h_i(a_i) \Big)$$

$$\sum_{k\neq i} (w_{ik}(b_i, z_k) - w_{ik}(a_i, z_k)) + h_i(a_i) - h_i(b_i)$$

$$= \sum_{k\neq i} (w_{ki}(z_k, b_i) - w_{ki}(z_k, a_i)) + h_i(a_i) - h_i(b_i). \text{ Q.e.d.}$$

Propositie 18 *Elk symmetrisch 2×2 bi-matrix-spel is een bilateraal symmetrisch interactie spel en dus een exact potentiaalspel.* $\diamond$

Bewijs.— Zie [22]. Q.e.d.

5.4 Concrete voorbeelden

Voorbeeld 2 *(Cournot oligopolie met affiene prijsfunctie.) Beschouw het volgende spel in strategische vorm met* $X_i = \mathbb{R}_+$ *voor elke* i*:*

$$f_i(\mathbf{x}) = (\alpha - \beta \sum_{l=1}^{n} x_l)x_i - c_i(x_i).$$

Hier zijn $\alpha, \beta > 0$ *en* $c_i : X_i \to \mathbb{R}$*.*

In geval elke c_i *differentieerbaar is, volgt* $D_i D_j f_i = D_i D_j f_j = -\beta$ *voor alle* i *en* j *met* $i \neq j$*. Stelling 5 garandeert dat het spel een exact potentiaalspel is. Er geldt* $D_i f_i = \alpha - \beta(x_i - \sum_l x_l) - Dc_i$*. Definieer* $P : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *door*

$$P(\mathbf{x}) = \alpha \sum_l x_l - \beta \sum_l x_l^2 - \beta \sum_{1 \leq p < q \leq n} x_p x_q - \sum_l c_l(x_l).$$

Propositie 17 garandeert, in geval c_i *continu differentieerbaar is, dat* P *een exacte potentiaal is.*

Opmerking: bovenstaande P *is zelfs een exacte potentiaal zonder de differentieerbaarheid der* c_i*.* $\diamond$

Voorbeeld 3 *(Grensoverschrijdend vervuilingsspel.) Volgt nu een voorbeeld uit de milieu-economie (zie bijvoorbeeld [3]). Een* <u>*grensoverschrijdend vervuilingsspel*</u> *is een spel in strategische vorm waar voor elke speler* $i \in N$ *de strategieverzameling* X_i *een eigenlijk interval van* $\mathbb{R}$ *is met* $0 \in X_i \subseteq \mathbb{R}_+$ *en zijn uitbetalingsfunctie gegeven wordt door de volgende formule*

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{P}_i(x_i) - \mathcal{D}_i(\sum_{l=1}^{n} \tau_{il} x_l).$$

Hier zijn alle $\tau_{il} \geq 0$, $\tau_{ii} > 0$, $\mathcal{P}_i : X_i \to \mathbb{R}$ *en* $\mathcal{D}_i : \sum_{l \in N} \tau_{il} X_l \to \mathbb{R}$*. Verder is de* $n \times n$*-matrix* $\mathcal{T} := (\tau_{il})$ *niet-diagonaal.*

In geval $X_1 = \cdots = X_n =: X$, $\tau_{il} = 1$ *voor alle* i, j *en* $\mathcal{D}_1 = \cdots = \mathcal{D}_n := \mathcal{D}$*, is het grensoverschrijdende vervuilingspel een exact potentiaalspel. Inderdaad, definieer* $P : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *door*

$$P(\mathbf{x}) := \sum_{l \in N} \mathcal{P}_l(x_l) - \mathcal{D}(\sum_{l \in N} x_l).$$

Voor $i \in N$ *definieer* $h_i : \mathbf{X}_{\hat{i}} \to \mathbb{R}$ *door*

$$h_i(\mathbf{z}) := - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \mathcal{P}_j(z_j)$$

Nu geldt voor alle $i \in N$ *en* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$

$$f_i(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}) + h_i(\mathbf{x}_{\hat{i}}).$$

Propositie 14 garandeert dat P *een exacte potentiaal is.* $\diamond$

Tenslotte merken we hier nog even op dat een variant van Stelling 5 recentelijk ontwikkeld is in [2].

6 Ordinale potentiaalspelen

6.1 Relatie met coördinatiespel

Propositie 19 *Beschouw een spel in strategische vorm* $\Gamma = (X_1, \ldots, X_n; f_1, \ldots, f_n)$, $P : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *en de volgende twee uitspraken.*

a. P *is een ordinale potentiaal voor* Γ*.*

b. Het coördinatiespel $\Gamma' = (X_1, \ldots, X_n; P, \ldots, P)$ *heeft dezelfde beste antwoord correspondenties als* Γ *(en dus ook dezelfde nash evenwichten als* Γ*).* $\diamond$

Er geldt "a $\Leftrightarrow$ *b".*

Bewijs.— "a $\Rightarrow$ b": vervang in het bewijs van Propositie 11 "exacte" door "ordinale".

"b $\Rightarrow$ a": stel b geldt. Fixeer $i, \mathbf{z}$ en a_i, b_i. Duidt met R'_i de beste antwoord correspondentie van speler i in Γ' aan. Dus $R'_i(\mathbf{z}) = \mathrm{argmax}_{x_i \in X_i} P(x_i; \mathbf{z}) = R_i(\mathbf{z})$. Dit impliceert $f_i(a_i; \mathbf{z}) < f_i(b_i; \mathbf{z})$ Q.e.d.

Opmerking: "b $\Rightarrow$ a" geldt niet in Propositie 19.

6.2 Verbeteringseigenschappen

Propositie 20 *Elk eindig ordinaal potentiaalspel heeft de eindige verbeteringseigenschap.* $\diamond$

Bewijs.— Precies zo als het bewijs van Propositie 12. Q.e.d..

Omdat elk eindig ordinaal potentiaalspel de eindige verbeteringseigenschap heeft, garandeert Propositie 8 dat zo'n spel geen niet-triviaal cyclisch verbeteringspad heeft. Dat resultaat geldt zelfs zonder de eindigheid van het spel:

Propositie 21 *In een ordinaal potentiaalspel bestaat er geen niet-triviaal cyclisch verbeteringspad.* $\diamond$

Bewijs.— Net zo als het bewijs van Propositie 13. Q.e.d.

De volgende stelling verbetert Propositie 21 in geval het spel eindig is.

Stelling 7 *Voor een spel in strategische vorm* Γ *met* $\mathbf{X}$ *aftelbaar zijn de volgende uitspraken equivalent:*

a. Γ *is een ordinaal potentiaalspel.*

b. Er bestaat geen niet-triviaal cyclisch zwak verbeteringspad. $\diamond$

Bewijs.— "*a* $\Rightarrow$ *b*" hebben we dus al. Voor "*b* $\Rightarrow$ *a*" zie de literatuur, bijvoorbeeld [24]. Q.e.d.

Een spel met de eindige verbeteringseigenschap hoeft geen ordinaal potentiaalspel te zijn. Zie ook Propositie 24.

6.3 Concrete voorbeelden

Voorbeeld 4 *(Cournot oligopolie met lineaire kostenfunctie.) Beschouw het volgende spel in strategische vorm met $X_i = \mathbb{R}_+$ voor elke i:*

$$f_i(\mathbf{x}) = p(x_1 + \cdots + x_n)x_i - cx_i.$$

Hier is $c > 0$ en $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Definieer $P : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ door

$$P(\mathbf{x}) = \prod_l x_l(p(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - c).$$

Voor $i \in N, \mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{i}}$ en $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ geldt

$$f_i(a_i; \mathbf{z}) - f_i(b_i; \mathbf{z}) = p(a_i + \sum_l z_l)a_i - ca_i - (p(b_i + \sum_l z_l)b_i - cb_i).$$

$$P(a_i; \mathbf{z}) - P(b_i; \mathbf{z}) = \prod_l z_l \Big(a_i(p(a_i + \sum_l z_l) - c) - (b_i(p(b_i + \sum_l z_l) - c) \Big).$$

Dit impliceert $f_i(a_i; \mathbf{z}) < f_i(b_i; \mathbf{z}) \;\Leftrightarrow\; P(a_i; \mathbf{z}) < P(b_i; \mathbf{z})$. Dus P is een ordinale potentiaal. $\diamond$

7 Gegeneraliseerde ordinale potentiaalspelen

7.1 Verbeteringseigenschappen

Propositie 22 *Elk eindig gegeneraliseerd ordinaal potentiaalspel heeft de eindige verbeteringseigenschap.* $\diamond$

Bewijs.— Net zo als het bewijs van Propositie 12. Q.e.d.

Stelling 2(1) impliceert nu:

Corollarium 1 *Elk eindig gegeneraliseerd ordinaal potentiaalspel is zwak acyclisch.* $\diamond$

Omdat elk eindig gegeneraliseerd ordinaal potentiaalspel de eindige verbeteringseigenschap heeft, garandeert Propositie 7 dat zo'n spel geen niet-triviaal cyclisch verbeteringspad heeft. Dat resultaat geldt zelfs zonder de eindigheid van het spel:

Propositie 23 *In een gegeneraliseerd ordinaal potentiaalspel bestaat er geen niet-triviaal cyclisch verbeteringspad.* $\diamond$

Bewijs.— Net zo als het bewijs van Propositie 13. Q.e.d.

Stelling 8 *(Monderer en Shapley 1996.) Voor een eindig spel in strategische vorm Γ zijn de volgende uitspraken equivalent:*

a. Γ *is een gegeneraliseerd ordinaal potentiaalspel.*

b. Γ *heeft de eindige verbeteringseigenschap.*

c. Er bestaat geen niet-triviaal cyclisch verbeteringspad. $\diamond$

Bewijs.— 'a $\Rightarrow$ b': dankzij Propositie 22.
'b $\Leftrightarrow$ c': dankzij Propositie 7.
'b $\Rightarrow$ a': zie [16]. definieer als volgt een relatie R op $\mathbf{X}$: $\mathbf{x}R\mathbf{y}$ betekent dat Q.e.d.

Propositie 24 *Beschouw een gegeneraliseerd ordinaal potentiaalspel. Voldoende voor de existentie van een ordinale potentiaal is dat elke conditionele uitbetalingsfunctie injectief is.* $\diamond$

Bewijs.— Zij P een gegeneraliseerde ordinale potentiaal. Dus voor elke $i \in N$, $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$ en $a_i, b_i \in X_i$

$$f_i(a_i; \mathbf{z}) < f_i(b_i; \mathbf{z}) \;\Rightarrow\; P(a_i; \mathbf{z}) < P(b_i; \mathbf{z}). \tag{12}$$

We laten nu zien dat de injectiviteit van $f_i(\cdot; \mathbf{z})$ impliceert dat in deze formule ook " $\Leftarrow''$ geldt; dus P is een ordinale potentiaal.
Stel dus $i \in N$, $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$, $a_i, b_i \in X_i$ en $P(a_i; \mathbf{z}) < P(b_i; \mathbf{z})$. Dus $a_i \neq b_i$. (12) impliceert dat $f_i(a_i; \mathbf{z}) > f_i(b_i; \mathbf{z})$ niet geldt. Ook geldt $f_i(a_i; \mathbf{z}) = f_i(b_i; \mathbf{z})$ niet, want dan zou $a_i = b_i$. Q.e.d.

8 Beste antwoord potentiaalspelen

8.1 Relatie met coördinatiespel

Propositie 25 *Stel P is een beste antwoord potentiaal voor* $\Gamma = (X_1, \ldots, X_n; f_1, \ldots, f_n)$. *Zij* Γ' *het coördinatiespel* $(X_1, \ldots, X_n; P, \ldots, P)$.

1. Γ *en* Γ' *hebben dezelfde beste antwoord correspondenties.*

2. $E(\Gamma) = E(\Gamma')$. $\diamond$

Bewijs.— 1. Omdat $R_i(\mathbf{z}) = \text{argmax}_{x_i \in X_i} P(x_i; \mathbf{z})$.
2. dankzij deel 1. Q.e.d.

8.2 Verbeteringseigenschappen

Stelling 9 *Elk eindig beste antwoord potentiaalspel heeft de eindige beste antwoord verbeteringseigenschap.* $\diamond$

Bewijs.— Uit het ongerijmde. Dus stel dat $\gamma = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots)$ een oneindig beste antwoord compatibel verbeteringspad is. Dit impliceert dat $f_{i(l)}(\mathbf{x}^{l+1}) > f_{i(1)}(\mathbf{x}^l)$ voor alle $l \geq 1$. Omdat het spel een beste antwoord potentiaalspel is, volgt met (11) dat $P(\mathbf{x}^1) < P(\mathbf{x}^2) < \cdots$. Dat is echter onmogelijk omdat het spel eindig is. Q.e.d.

Propositie 8 impliceert dat een eindig beste antwoord potentiaalspel geen niet-triviaal cyclisch beste antwoord compatibel verbeteringspad heeft. Dat resultaat geldt zelfs zonder de eindigheid van het spel:

Propositie 26 *In een beste antwoord potentiaalspel bestaat er geen niet-triviaal cyclisch beste antwoord compatibel zwak verbeteringspad.* $\diamond$

Bewijs.— Stel $\gamma = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k)$ is een niet-triviaal beste antwoord zwak verbeteringspad. We moeten laten zien dat $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^k$ is. Fixeer een beste antwoord potentiaal P. Omdat $f_{i(l)}(\mathbf{x}^{l+1}) \geq f_{i(l)}(\mathbf{x}^l)$ voor alle l met tenminste één ongelijkheid strikt, volgt uit (10) en (11) dat $P(\mathbf{x}^k) \geq \cdots \geq P(\mathbf{x}^1)$ met ook hier tenminste één ongelijkheid strikt. Dit geeft $P(\mathbf{x}^k) > P(\mathbf{x}^1)$ en dus $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^k$. Q.e.d.

Deze propositie garandeert dus ook dat in een beste antwoord potentiaalspel er geen niet-triviaal cyclisch beste antwoord compatibel verbeteringspad bestaat. Het is verder wel heel goed mogelijk dat een beste antwoord potentiaalspel een niet-triviaal cyclisch verbeteringspad (en dus ook een oneindig verbeteringspad) heeft.

Stelling 10 *Voor een spel in strategische vorm Γ met eigenlijke beste antwoord correspondenties zijn de volgende uitspraken equivalent:*

a. Γ is een beste antwoord potentiaalspel.

b. Elk eindig niet-triviaal beste antwoord zwak verbeteringspad is acyclisch. $\diamond$

Bewijs.— a $\Rightarrow$ b: dankzij Propositie 26.
b $\Rightarrow$ a: zie [24]. Q.e.d.

Het volgende voorbeeld, dat de auteur door Kukushkin aangereikt is, toont aan dat Stelling 10 niet meer waar is in geval de eis dat de beste antwoord correspondenties eigenlijk zijn, weggelaten wordt.[18]

Voorbeeld 5 *Stel* $n = 2,\ X_1 = \{1/1, 1/2, 1/3, \ldots\} \cup \{0\}, X_2 = \{0, 1\},$

$$f_1(x_1, 0) := \begin{cases} 1 \text{ als } x_1 = 1, \\ 0 \text{ als } x_1 < 1, \end{cases} \quad f_1(x_1, 1) := \begin{cases} 1 - x_1 \text{ als } x_1 > 0, \\ 0 \text{ als } x_1 = 0, \end{cases}$$

$$f_2(x_1, x_2) := \begin{cases} 0 \text{ als } x_1 < 1 \wedge x_2 = 1, \\ 1 \text{ als } x_1 < 1 \wedge x_2 = 0, \\ 1 \text{ als } x_1 = 1 \wedge x_2 = 1, \\ 0 \text{ als } x_1 = 1 \wedge x_2 = 0. \end{cases}$$

Dit impliceert

$$R_1(0) = \{1\},\ R_1(1) = \emptyset,\ R_2(x_1) = \{0\}\ (x_1 < 1), R_2(1) = \{1\}.$$

[18]Dit maakt dat Theorem 3.1 and Theorem 3.2 in [24] niet zonder meer correct zijn.

Omdat $\#X_2 = 2$ en $R_1(1) = \emptyset$ volgt dat elk beste antwoord zwak verbeteringspad eindig is. Propositie 10 garandeert daarom dat elk eindig niet-triviaal beste antwoord compatibel verbeteringspad acyclisch is. Stel nu eens dat $P : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ een beste antwoord potentiaal zou zijn. Omdat, voor elke $a_1 \in X_1 \backslash \{1\}$, het pad $((a_1, 1),\ (a_1, 0),\ (1, 0), (1, 1))$ een beste antwoord compatibel verbeteringspad is en P een beste antwoord potentiaal is, volgt voor elke $a_1 < 1$ met (11) dat

$$P(a_1, 1) < P(a_1, 0) < P(1, 0) < P(1, 1).$$

Maar, omdat $1 \notin \mathrm{argmax}_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, 1)$, is ook $1 \notin \mathrm{argmax}_{x_1 \in X_1} P(x_1, 1)$. Dus is er een $x_1 < 1$ met $P(x_1, 1) > P(1, 1)$, tegenspraak. $\diamond$

9 Gegeneraliseerde beste antwoord potentiaalspelen

9.1 Verbeteringseigenschappen

We hebben met Stelling 1(3) al gezien dat elk eindig potentiaalspel een nash evenwicht heeft. De volgende stelling impliceert, dankzij Stelling 2(3), dit resultaat nog eens voor eindige gegeneraliseerde beste antwoord potentiaalspelen.

Stelling 11 *Elk eindig gegeneraliseerd beste antwoord potentiaalspel heeft de eindige beste antwoord verbeteringseigenschap.* $\diamond$

Bewijs.— Zij $\succ$ een gegeneraliseerde beste antwoord potentiaal. We moeten bewijzen dat elk beste antwoord compatibel verbeteringspad eindig is. Welnu, als $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots)$ een oneindig dergelijk pad zou zijn, dan zou volgens Propositie 3(2), $\cdots \mathbf{x}^2 \rhd \mathbf{x}^1$ en vandaar $\cdots \succ \mathbf{x}^2 \succ \mathbf{x}^1$. Omdat het spel eindig is, zijn er l, m met $l < m$ en $\mathbf{x}^{(l)} = \mathbf{x}^{(m)}$. Maar dan zou $\mathbf{x}^m \succ \mathbf{x}^l$ vanwege de transitiviteit van $\succ$. Dat is echter absurd vanwege de irreflexiviteit van $\succ$. Q.e.d.

Omdat een eindig gegeneraliseerd beste antwoord potentiaalspel de eindige beste antwoord verbeteringseigenschap heeft, heeft zo'n spel geen niet-triviaal cyclisch beste antwoord compatibel verbeteringspad. Dat resultaat geldt zelfs zonder de eindigheid van het spel:

Propositie 27 *In een gegeneraliseerd beste antwoord potentiaalspel bestaat er geen niet-triviaal cyclisch beste antwoord compatibel verbeteringspad.* $\diamond$

Bewijs.— Stel $\gamma = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k)$ is een niet-triviaal eindig beste antwoord compatibel verbeteringspad. We moeten laten zien dat $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^k$ is. Fixeer een gegeneraliseerde beste antwoord potentiaal $\succ$. Propositie 3(2) gasrandeert $\mathbf{x}^k \rhd \cdots \rhd \mathbf{x}^1$. Er volgt $\mathbf{x}^k \succ \cdots \succ \mathbf{x}^1$. Omdat $\succ$ transitief is volgt $\mathbf{x}^k \succ \mathbf{x}^1$. Omdat $\succ$ irreflexief is, volgt $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^k$. Q.e.d.

Het is een misverstand te denken dat het volgende resultaat geldt voor een eindig spel in strategische vorm Γ: Γ is een beste antwoord potentiaalspel $\Leftrightarrow$ Γ heeft de eindige beste antwoord verbeteringseigenschap.

Stelling 12 *Beschouw de volgende drie uitspraken voor een spel in strategische vorm met eigenlijke beste antwoord correspondenties.*

a. Het spel is een gegeneraliseerd beste antwoord potentiaalspel.

b. Het spel heeft de eindige beste antwoord verbeteringseigenschap.

c. Er bestaat geen niet-triviaal cyclisch beste antwoord compatibel verbeteringspad.

Er geldt $b \Rightarrow c$ *en* $a \Leftrightarrow c$. *Indien het spel eindig is, geldt* $a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c$.

Bewijs.— Zie de literatuur. Q.e.d.

10 Pseudo potentiaalspelen

10.1 Relatie met coördinatiespel

Propositie 28 *Stel* P *is een pseudo potentiaal voor* $\Gamma = (X_1, \ldots, X_n; f_1, \ldots, f_n)$. *Zij* Γ' *het coördinatiespel* $(X_1, \ldots, X_n; P, \ldots, P)$. *Zij* R_i *de beste antwoord correspondentie van speler* i *in* Γ *en* $R_i{}'$ *de beste antwoord correspondentie van speler* i *in* Γ'

1. *Voor alle* $i \in N$ *en* $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$: $R_i{}'(\mathbf{z}) \subseteq R_i(\mathbf{z})$.
2. $E(\Gamma') \subseteq E(\Gamma)$.
3. $\operatorname{argmax}(P) \subseteq E$. $\diamond$

Bewijs.— 1. Dit volgt meteen uit de definitie van pseudo-potentiaal.
2. Dit volgt meteen uit deel 1.
3. Stel $\mathbf{e}$ is een maximaliseerder van P. Dus $P(\mathbf{e}) \geq P(\mathbf{a})$ voor alle $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$. Dit impliceert voor alle i dat $e_i \in R_i{}'(\mathbf{e}_{\hat{\imath}})$. Dus $\mathbf{e}$ is een nash evenwicht van Γ'. Deel 2 garandeert dat $\mathbf{e}$ ook een nash evenwicht van Γ is. Q.e.d.

10.2 Verbeteringseigenschappen

Er bestaan resultaten aangaande verbeteringseigenschappen voor pseudo potentiaalspelen. Een en ander in dat verband is relatief gecompliceerd. In deze versie van het typoscript laten we het hierbij.

Pseudo potentiaalspelen hebben diverse speltheoretische resultaten, vooral uit de theorie der industriële organisatie, conceptueler gemaakt. In dat verband vermeld de auteur nu, zonder verder commentaar, slechts dat spelen met aggregatie met zwak strategische substituten of met zwak strategische complementen pseudo potentiaalspelen zijn.

11 Quasi en zwakke quasi potentiaalspelen

Propositie 29 *1. Elk spel in strategische vorm met een nash evenwicht is een quasi potentiaalspel.*

2. Elk eindig spel in strategische vorm zonder nash evenwicht is geen quasi potentiaalspel.

3. Elk oneindig spel in strategische vorm is een quasi potentiaalspel. $\diamond$

Bewijs.— 1. Definieer $P : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ door $P(\mathbf{x}) = \begin{cases} 137 \text{ als } \mathbf{x} \in E, \\ 0 \text{ als } \mathbf{x} \notin E. \end{cases}$. Omdat $E \neq \emptyset$ volgt $\text{argmax}(P) = E$ en is dus P een quasi-potentiaal.

2. Omdat het spel eindig is, geldt voor elke $P : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ dat $\text{argmax}(P) \neq \emptyset$ terwijl $E = \emptyset$.

3. Als $E \neq \emptyset$ volgt dit uit deel 1. Nu stel $E = \emptyset$. Omdat $E = \emptyset$, is elke functie $P : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ die geen maximaliseerder heeft (en zo'n functie bestaat omdat er oneindig veel strategieprofielen zijn) een quasi-potentiaal. Q.e.d.

Propositie 30 *Stel elke strategieverzameling is een convex open deel van $\mathbb{R}^n$ en $P : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ is een exacte potentiaal. Als P concaaf en partieel differentieerbaar is, dan is P een quasi-potentiaal.* $\diamond$

Bewijs.— Omdat P een exacte potentiaal is, geldt $\text{argmax}(P) \subseteq E$. Resteert te bewijzen dat $E \subseteq \text{argmax}(P)$. Daartoe stel $\mathbf{e} \in E$. Omdat P concaaf is, volgt dat $\mathbf{e}$ een maximaliseerder van P is als we laten zien dat $D_i P(\mathbf{e}) = 0$ $(i \in N)$. Fixeer $i \in N$ en fixeer een willekeurige $b_i \in X_i$. Omdat $\mathbf{e} \in E$ en $\mathbf{X}$ open is volgt $D_i f_i(\mathbf{e}) = 0$. Omdat P een exacte potentiaal is, volgt voor alle $x_i \in X_i$

$$f_i(x_i; \mathbf{e}_{\hat{\imath}}) - f_i(b_i; \mathbf{e}_{\hat{\imath}}) = P(x_i; \mathbf{e}_{\hat{\imath}}) - P(b_i; \mathbf{e}_{\hat{\imath}}).$$

Dit impliceert $D_i f_i(\cdot; \mathbf{e}_{\hat{\imath}}) = D_i P(\cdot; \mathbf{e}_{\hat{\imath}})$. In het bijzonder, zoals gewenst, $0 = D_i f_i(e_i; \mathbf{e}_{\hat{\imath}}) = D_i P(e_i; \mathbf{e}_{\hat{\imath}})$. Q.e.d.

12 Congestiespelen

12.1 Inleiding

In de volgende deelparagraaf presenteren en analyseren we het congestiemodel en bijhorend congestiespel à la Rosenthal ([19]).

12.2 Congestiemodel en -spel

In reële-wereld bewoordingen betreft een congestiemodel een model waar elke speler een speciale combinatie van zogenaamde primaire faciliteiten kiest uit een gemeenschappelijke verzameling van dergelijke faciliteiten. De uitbetaling geassocieerd met elke primaire faciliteit is een functie van het aantal spelers dat die faciliteit in hun keuze hebben. De uitbetaling die een speler ontvangt is de som van de uitbetalingen geassocieerd met de primaire faciliteiten in zijn keuze.

Een congestiemodel is gespecificeerd door een 4-tuple $(N, R, (X_i)_{i\in N}, (d_r)_{r\in R})$ waar

- $N = \{1, \dots, i, \dots, n\}$,
- $R = \{1, \dots, r, \dots, m\}$, een niet-lege eindige verzameling,
- $X_i \subseteq 2^R \setminus \{\emptyset\}$,
- $d_r : N \to \mathbb{R}$ een functie.

Interpretatie: N is de verzameling der spelers, R is de verzameling der resources, X_i de verzameling der strategieën van speler i, d_r de kostenfunctie voor gebruik van resource r met $d_r(k)$ de kosten voor elke speler die ressource r gebruikt als k spelers deze ressource gebruiken. De d_r zijn dus speler onafhankelijk.[19]

Een speciaal geval is waar X_i voor elke speler bestaat uit één niet-lege deelverzameling van R en wel voor elke speler dezelfde deelverzameling. In toepassingen zijn de functies d_r veelal nog stijgend.

Gegeven een congestiemodel $(N, R, (X_i)_{i\in N}, (d_r)_{r\in R})$ is het geassocieerde congestiespel het spel in strategische vorm $(X_1, \dots, X_n; f_1, \dots, f_n)$ met N als spelersverzameling, X_i de strategieverzameling van speler i en

$$f_i(\mathbf{x}) := -\sum_{r\in x_i} d_r(n_r(\mathbf{x}))$$

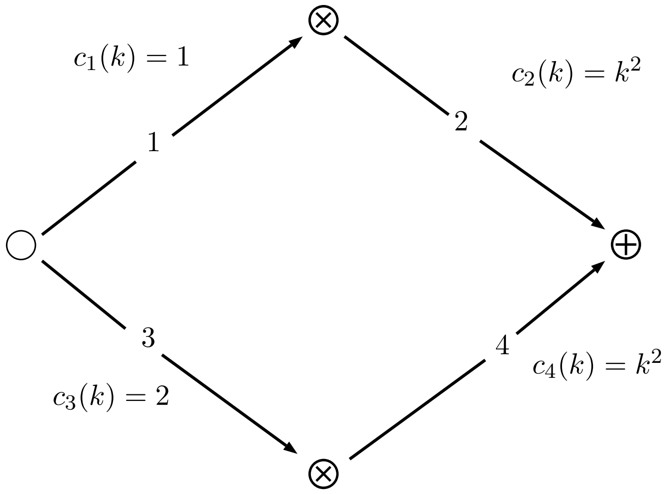
de uitbetalingsfunctie f_i voor speler i; hier is

$$n_r(\mathbf{x}) := \#\{i \in N \mid r \in x_i\}.$$

Een van de toepassingen van congestiemodellen zijn verkeersnetwerken. Volgt nu een (tot de verbeelding sprekend) simpel voorbeeld daarvan. De spelersverzameling N is de verzameling van automobilisten en de verzameling der ressources R is de verzameling van alle wegen. Alle automobilisten hebben het zelfde vertrekpunt en aankomstpunt. De strategie x_i van automobilist i is een routekeuze, X_i is de verzameling van routekeuzes die voor voor automobilist i in aanmerking komen, $n_r(\mathbf{x})$ het aantal automobilisten dat gebruikt maakt van weg r bij routekeuzen $\mathbf{x}$, $d_r(k)$ de kosten voor een automobilist voor gebruik van weg r als er k automobilisten zijn die gebruik van weg r maken.

Hier is een voorbeeld van dat geval; het wordt op voor de hand liggende wijze gerepresenteerd (i.e. gedefinieerd) door onderstaande graaf. De beoogde interpretatie is de volgende: er zijn vier wegen, genummerd met 1, 2, 3, 4. Verder is de kostenvector c_j voor elke weg j gegeven. Stel nu dat er twee automobilisten zijn die van $\bigcirc$ naar $\bigoplus$ willen en voor beiden daarvoor de routekeuzes $\{1, 2\}$ (i.e. weg 1 gevolgd door weg 2) en $\{3, 4\}$ in aanmerking komen.

[19][15] bestudeert congestiespelen met speler afhankelijke kostenfuncties waar er slechts één ressource is.



Met route $\{1,2\}$ als strategie 1 en $\{3,4\}$ als strategie 2 is het geassocieerde congestiespel dan het bi-matrix-spel $\begin{pmatrix} -5;-5 & -2;-3 \\ -3;-2 & -6;-6 \end{pmatrix}$. Dit spel heeft twee nash evenwichten: $(1,2)$ en $(2,1)$.

12.3 Eigenschappen

In bovenstaand voorbeeld had het spel een nash evenwicht. De volgende stelling geeft daarvoor een diepere oorzaak aan.

Stelling 13 *Elk congestiespel is een exact potentiaalspel. Een exacte potentiaal* $P : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ *wordt gegeven door* $P(\mathbf{x}) = -\sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{n_r(\mathbf{x})} d_r(k)$. $\diamond$

Bewijs.— Om te bewijzen dat P een exacte potentiaal is fixeer $i \in N$, $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_{\hat{\imath}}$ en $a_i, b_i \in X_i$. Met Δ het symbool voor het symmetrische verschil, geldt

$$R = (a_i \Delta b_i) \cup (R \setminus (a_i \Delta b_i))$$

en dat deze vereniging disjunct is. De belangrijke opmerkingen zijn nu dat

$$n_r(a_i; \mathbf{z}) = n_r(b_i; \mathbf{z}) \text{ voor elke } r \in R \setminus (a_i \Delta b_i)),$$

$$n_r(a_i; \mathbf{z}) - n_r(b_i; \mathbf{z}) = 1 \; (r \in a_i \setminus b_i) \text{ en } n_r(b_i; \mathbf{z}) - n_r(a_i; \mathbf{z}) = 1 \; (r \in b_i \setminus a_i),$$

$$n_r(a_i; \mathbf{z}) = n_r(b_i; \mathbf{z}) \; (r \in a_i \cap b_i).$$

Daarmee volgt enerzijds

$$P(a_i; \mathbf{z}) - P(b_i; \mathbf{z})$$

$$= -\sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{n_r(a_i;\mathbf{z})} d_r(k) + \sum_{r \in R} \sum_{k=1}^{n_r(b_i;\mathbf{z})} d_r(k)$$

$$= -\sum_{r\in a_i\Delta b_i}\sum_{k=1}^{n_r(a_i;\mathbf{z})} d_r(k) + \sum_{r\in a_i\Delta b_i}\sum_{k=1}^{n_r(b_i;\mathbf{z})} d_r(k)$$

$$= -(\sum_{r\in a_i\setminus b_i} + \sum_{r\in b_i\setminus a_i})\sum_{k=1}^{n_r(a_i;\mathbf{z})})d_r(k) + (\sum_{r\in a_i\setminus b_i} + \sum_{r\in b_i\setminus a_i}\sum_{k=1}^{n_r(b_i;\mathbf{z})})d_r(k))$$

$$= -\sum_{r\in a_i\setminus b_i}(\sum_{k=1}^{n_r(a_i;\mathbf{z})} - \sum_{k=1}^{n_r(b_i;\mathbf{z})})d_r(k) + \sum_{r\in b_i\setminus a_i}(\sum_{k=1}^{n_r(b_i;\mathbf{z})} - \sum_{k=1}^{n_r(a_i;\mathbf{z})})d_r(k).$$

$$= \sum_{r\in b_i\setminus a_i} d_r(n_r(b_i;\mathbf{z})) - \sum_{r\in a_i\setminus b_i} d_r(n_r(a_i;\mathbf{z})).$$

En anderzijds

$$f_i(a_i;\mathbf{z}) - f_i(b_i;\mathbf{z})$$

$$= -\sum_{r\in a_i} d_r(n_r(a_i;\mathbf{z})) + \sum_{r\in b_i} d_r(n_r(b_i;\mathbf{z}))$$

$$= -(\sum_{r\in a_i\setminus b_i} + \sum_{r\in a_i\cap b_i} d_r(n_r(a_i;\mathbf{z})) + (\sum_{r\in b_i\setminus a_i} + \sum_{r\in b_i\cap a_i} d_r(n_r(b_i;\mathbf{z}))$$

$$= \sum_{r\in b_i\setminus a_i} d_r(n_r(b_i;\mathbf{z})) - \sum_{r\in a_i\setminus b_i} d_r(n_r(a_i;\mathbf{z})).\ \text{Q.e.d.}$$

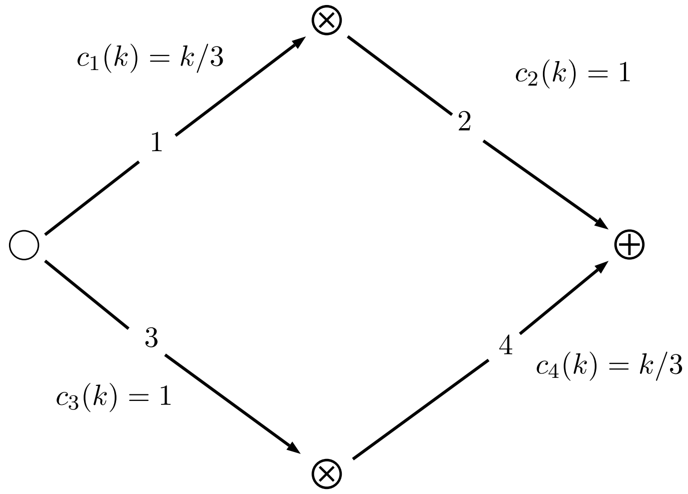
Verrassend is dat Stelling 13 niet verondersteld dat de kostenfuncties d_r stijgend zijn.

Stelling 14 *Elk eindig potentiaalspel is herbenoemingsequivalent met een congestiespel.* $\diamond$

Bewijs.— Zie [16]. Q.e.d.

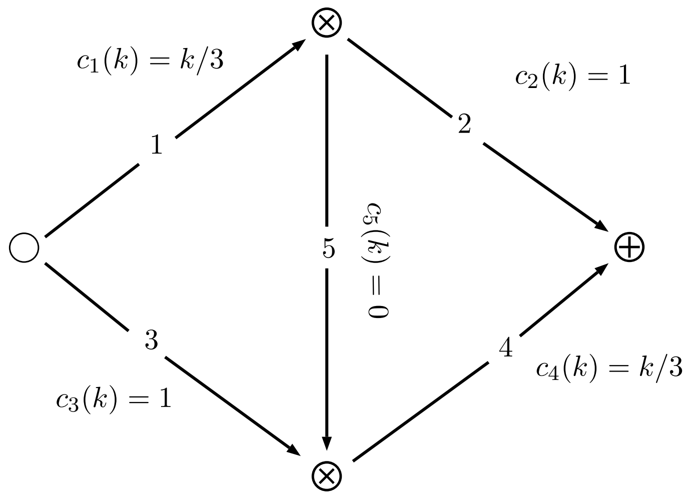
12.4 Braess' paradox

Beschouw, net als in de vorige deelparagraaf, een verkeersnetwerk, en wel:



De bi-matrix voor dit spel is $\begin{pmatrix} -5/3; -5/3 & -4/3; -4/3 \\ -4/3; -4/3 & -5/3; -5/3 \end{pmatrix}$. Dit spel heeft twee nash evenwichten: $(1, 2)$ en $(2, 1)$. In elke evenwicht heeft elke speler uitbetaling $-4/3$.

We modificeren bovenstaand verkeersnetwerk nu door een vijfde weg toe te voegen waarvan het gebruik geen kosten oplevert:



Dit levert een derde routekeuze op: $\{1, 5, 4\}$. Met deze als derde strategie krijgen we het bi-matrix-spel $\begin{pmatrix} -5/3; -5/3 & -4/3; -4/3 & -5/3; -1 \\ -4/3; -4/3 & -5/3; -5/3 & -5/3; -1 \\ -1; -5/3 & -1; -5/3 & -4/3; -4/3 \end{pmatrix}$. Dit spel heeft één nash evenwichten: $(3, 3)$. In dat evenwicht heeft elke speler uitbetaling $-4/3$. Conclusie: toevoegen van weg 5 “heeft niets opgeleverd”.

Referenties

[1] P. Dubey, O. Haimanko, and Zapechelnyuk. Strategic complements and substitutes, and potential games. *Games and Economic Behavior*, 54:77–94, 2006.

[2] C. Ewerhart. Ordinal potentials in smooth games. Technical Report 265, University of Zürich, 2018.

[3] H. Folmer and P. H. M. von Mouche. Nash equilibria of transboundary pollution games. In M. Ruth, editor, *Handbook of Research Methods and Applications in Environmental Studies*, pages 504–524. Edward-Elgar, Cheltenham, 2015.

[4] Z. Han, D. Niyato, W. Saad, T. Basar, and A. Hjørungnes. *Game Theory in Wireless and Communication Networks, Theory, Models, and Applications*. Cambridge University Press, 2011.

[5] J. J. Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proc. Nat. Acad. S.C.I. USA*, 79:2554–2558, 1982.

[6] T. Iimura, P. H. M. von Mouche, and T. Watanabe. Best-reply potential for two-person one-dimensional pure location games. Technical Report Research Paper Series 178, Tokyo Metropolitan University, Tokyo, Japan, 2017.

[7] T. Iimura, P. H. M. von Mouche, and T. Watanabe. Best-response potential for hotelling pure location games. *Economics Letters*, 160:73–77, 2017.

[8] T. Iimura, P. H. M. von Mouche, and T. Watanabe. Binary action games: Deviation properties, semi-strict equilibria and potentials. *Discrete Applied Mathematics*, 251:57–68, 2018.

[9] M. K. Jensen. Aggregative games and best-reply potentials. *Economic Theory*, 43:45–66, 2010.

[10] N. Kukushkin. Cournot tatonnement and potentials. *Journal of Mathematical Economics*, 59:117–127, 2015.

[11] N. S. Kukushkin. Potential games: a purely ordinal apoproach. *Economics Letters*, 64:279–283, 1999.

[12] N. S. Kukushkin. Best response dynamics in finite games with additive aggregation. *Games and Economic Behavior*, 48:94–110, 2004.

[13] N. S. Kukushkin and P. H. M. von Mouche. Cournot tatonnement and Nash equilibrium in binary status games. *Economics Bulletin*, 38(2):1038–1044, 2018.

[14] L. Mallozzi. Noncooperative facility location games. *Operations Research Letters*, 35:151–154, 2007.

[15] I. Milchtaich. Congestion games with player-specific payoff functions. *Games and Economic Behavior*, 13:111–124, 1996.

[16] D. Monderer and L. Shapley. Potential games. *Games and Economic Behavior*, 14:124–143, 1996.

[17] J. Park. Potential games with incomplete preferences. *Journal of Mathematical Economics*, 61:58–66, 2015.

[18] M. Punt and J. Wesseler. The formation of GM-free and GM-coasean clubs: Will they form and if so how much can they achieve? *Journal of Agricultural Economics*, 69(2):413–438, 2018.

[19] R. W. Rosenthal. A class of games possessing pure-strategy equilibria. *International Journal of Game Theory*, 2:65–67, 1973.

[20] B. C. Schipper. Pseudo-potential games. Technical report, University of Bonn, Bonn, Germany, 2004.

[21] E. Tardos and T. Wexler. Network formation games. In V. V. Vazirani, N. Nisan, T. Roughgarden, and E. Tardos, editors, *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press, United Kingdom, 2007.

[22] T. Ui. A Shapley value representation of potential games. *Games and Economic Behavior*, 31:121–135, 2000.

[23] H. Uno. *Essays on the Nested Potential Game and its Applications*. PhD thesis, Osaka University, 2009.

[24] M. Voorneveld. Best-response potential games. *Economics Letters*, 66:289–295, 2000.

[25] H. P. Weikard. Cartel stability under an optimal sharing rule. *The Manchester School*, 77(5):575–593, 2009.

[26] H. P. Young. The evolution of conventions. *Econometrica*, 61(1):57–84, 1993.